# 3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

## Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 101 - 103

## Α΄ Ομάδας

**1.**

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

**i)** $2\eta\mu\frac{3\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$ **ii)** $1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}$ **iii)** $2\sigma\upsilon\nu^2 135^0 - 1$ **iv)** $\frac{2\varepsilon\varphi 75^0}{1-\varepsilon\varphi^2 75^0}$

**Λύση**

**i)**

Εφαρμογή του τύπου ημ2α = 2ημασυνα: $2\eta\mu\frac{3\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = \eta\mu\left(2\frac{3\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1$

**ii)**

Εφαρμογή του τύπου $\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$:

$$1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12} = 1-2\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{12}}{2} = 1-1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**iii)**

Εφαρμογή του τύπου $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$:

$$2\sigma\upsilon\nu^2 135^0 - 1 = 2\,\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\cdot 135^0)}{2} - 1 = 1 + \sigma\upsilon\nu\, 270^o - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

**iv)**

Εφαρμογή του τύπου $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$:

$$\frac{2\varepsilon\varphi 75^0}{1-\varepsilon\varphi^2 75^0} = \varepsilon\varphi(2\cdot 75^o) = \varepsilon\varphi\, 150^o = \varepsilon\varphi(180^o - 30^o) = -\varepsilon\varphi\, 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**2.**

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις

**i)** $2ημ2α\,συν2α$ **ii)** $2συν^2\left(\frac{π}{4}-α\right)-1$ **iii)** $\frac{2εφ3α}{1-εφ^2 3α}$

**Λύση**

**i)**

Εφαρμογή του τύπου ημ2α = 2ημασυνα: 2ημ2ασυν2α = ημ(2·2α) = ημ4α

**ii)**

Εφαρμογή του τύπου $συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$:

$$2συν^2\left(\frac{π}{4}-α\right)-1 = 2\frac{1+συν2\left(\frac{π}{4}-α\right)}{2}-1 = 1+συν\left(\frac{π}{2}-2α\right)-1 = ημ2α$$

**iii)**

Εφαρμογή του τύπου $εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$:

$$\frac{2εφ3α}{1-εφ^2 3α} = εφ(2\cdot 3α) = εφ6α$$

**3.i)**

Να αποδείξετε ότι $ημ^2α+συν2α = συν^2α$

**Λύση**

$$ημ^2α+συν2α = 1-συν^2α+2συν^2α-1 = συν^2α$$

**3.ii)**

Να αποδείξετε ότι $\frac{ημ2α}{1-ημ^2α} = 2εφα$

**Λύση**

$$\frac{ημ2α}{1-ημ^2α} = \frac{2ημασυνα}{συν^2α} = 2\frac{ημα}{συνα} = 2εφα$$

**3.iii)**

Να αποδείξετε ότι $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha$

**Λύση**

$$\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha \iff \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} - \varepsilon\varphi\alpha = 2\frac{1}{\varepsilon\varphi 2\alpha}$$

$$\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} = 2\frac{1}{\varepsilon\varphi 2\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha\,\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} = 2$$

$$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}\,\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} = 2 \iff 2 = 2 \quad \text{που ισχύει}$$

**3.iv)**

Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$

**Λύση**

$$\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$$

**4.i)**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $2\alpha$, αν

$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$ και $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

**Λύση**

$$\eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \eta\mu\alpha = -\frac{3}{5} \quad \text{(τρίτο τεταρτημόριο)}$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\,\frac{12}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2\,\frac{16}{25} - 1 = \frac{32-25}{25} = \frac{7}{25}$$

$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \dfrac{24}{7}$ και $\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{7}{24}$

**4.ii)**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $2\alpha$, αν $\eta\mu\alpha = \dfrac{3}{5}$ και $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

**Λύση**

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5} \text{ (δεύτερο τεταρτημόριο)}$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\,\frac{3}{5}\left(-\frac{4}{5}\right) = -2\,\frac{12}{25} = -\frac{24}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2\,\frac{16}{25} - 1 = \frac{32-25}{25} = \frac{7}{25}$$

$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = -\dfrac{24}{7}$ και $\sigma\varphi 2\alpha = -\dfrac{7}{24}$

**5.**

Να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi(\alpha + 2\beta)$, αν $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{1}{4}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \dfrac{1}{3}$

**Λύση**

$$\varepsilon\varphi 2\beta = \frac{2\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\beta} = \frac{2\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha + 2\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 2\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi 2\beta} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}\frac{3}{4}} = \frac{1}{1-\frac{3}{16}} = \frac{1}{\frac{13}{16}} = \frac{16}{13}$$

**6.i)**

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha\eta\mu\alpha = \dfrac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$

**Λύση**

$$\begin{aligned}\eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha\eta\mu\alpha &= \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\left(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)\\ &= \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\ .1\\ &= \frac{1}{2}\,2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha\end{aligned}$$

**6.ii)**

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2$

**Λύση**

$$\eta\mu 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\,\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$
$$= 2\eta\mu^2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$
$$= 2(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\cdot 1 = 2$$

**6.iii)**

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

**Λύση**

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

**6.iv)**

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

**Λύση**

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$
$$= \frac{2\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

**7.i)**

Να λύσετε την εξίσωση $συν2x - ημx - 1 = 0$

**Λύση**

$συν2x - ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2ημ^2x - ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2ημ^2x + ημx = 0$

$ημx(2ημx + 1) = 0$

$ημx = 0$ ή $2ημx + 1 = 0$

- $ημx = 0 \Leftrightarrow x = kπ, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $2ημx + 1 = 0 \Leftrightarrow 2ημx = -1$

$ημx = -\frac{1}{2}$

$ημx = -ημ\frac{π}{6} = ημ\left(-\frac{π}{6}\right)$

$x = 2kπ - \frac{π}{6}$ ή $x = 2kπ + π + \frac{π}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = 2kπ - \frac{π}{6}$ ή $x = 2kπ + \frac{7π}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$

**7.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση $ημ2x - 2συνx + ημx - 1 = 0$

**Λύση**

$ημ2x - 2συνx + ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 2ημxσυνx - 2συνx + ημx - 1 = 0$

$2συνx(ημx - 1) + ημx - 1 = 0$

$(ημx - 1)(2συνx + 1) = 0$

$ημx - 1 = 0$ ή $2συνx + 1 = 0$

- $ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow ημx = 1 \Leftrightarrow x = 2kπ + \frac{π}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $2συνx + 1 = 0 \Leftrightarrow 2συνx = -1$

$συνx = -\frac{1}{2}$

$συνx = -συν\frac{π}{3}$

$συνx = συν\left(π - \frac{π}{3}\right)$

$συνx = συν\frac{2π}{3} \Leftrightarrow x = 2kπ \pm \frac{2π}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

**8.**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{16}$

**Λύση**

Από τον τύπο $2συν^2α = 1 + συν2α$, για $α = \frac{\pi}{8}$ έχουμε

$$2συν^2\frac{\pi}{8} = 1 + συν\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2συν^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2συν^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$συν^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$συν\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad αφού \ \frac{\pi}{8} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Από τον τύπο $2συν^2α = 1 + συν2α$, για $α = \frac{\pi}{16}$ έχουμε

$$2συν^2\frac{\pi}{16} = 1 + συν\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow$$

$$συν^2\frac{\pi}{16} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \Rightarrow συν\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad αφού \ \frac{\pi}{16} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Από τον τύπο $2ημ^2α = 1 - συν2α$, για $α = \frac{\pi}{16}$ έχουμε

$$2ημ^2\frac{\pi}{16} = 1 - συν\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow$$

$$ημ^2\frac{\pi}{16} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \Rightarrow ημ\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad αφού \ \frac{\pi}{16} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$εφ\frac{\pi}{16} = \frac{ημ\frac{\pi}{16}}{συν\frac{\pi}{16}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \quad και \quad σφ\frac{\pi}{16} = \frac{συν\frac{\pi}{16}}{ημ\frac{\pi}{16}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

**9.i)**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{\alpha}{2}$, αν

$συνα = \frac{5}{13}$ και $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

**Λύση**

Στον τύπο $2συν^2ω = 1 + συν2ω$ θέτουμε όπου ω το $\frac{\alpha}{2}$

$$2συν^2\frac{\alpha}{2} = 1 + συνα = 1 + \frac{5}{13} = \frac{18}{13} \Rightarrow$$

$$συν^2\alpha = \frac{9}{13} \Rightarrow$$

$$συν\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{13}}, \quad αφού \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Στον τύπο $2ημ^2ω = 1 - συν2ω$ θέτουμε όπου ω το $\frac{\alpha}{2}$

$$2ημ^2\frac{\alpha}{2} = 1 - συνα = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13} \Rightarrow$$

$$ημ^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow$$

$$ημ\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4}{13}}, \quad αφού \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$εφ\frac{\alpha}{2} = \frac{ημ\frac{\alpha}{2}}{συν\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad και \quad σφ\frac{\alpha}{2} = \frac{συν\frac{\alpha}{2}}{ημ\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

**9.ii)**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{\alpha}{2}$, αν

$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

**Λύση**

Στον τύπο $2\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\omega$ θέτουμε όπου $\omega$ το $\frac{\alpha}{2}$

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}},\ \text{αφού}\ \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$$

Στον τύπο $2\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu 2\omega$ θέτουμε όπου $\omega$ το $\frac{\alpha}{2}$

$$2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}},\ \text{αφού}\ \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{4}{1}} = -2$$

## 10.i)

Να λύσετε την εξίσωση $συν2x + 2συν^2\frac{x}{2} = 0$

**Λύση**

$συν2x + 2συν^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2συν^2x - 1 + 1 + συν\,x = 0$

$2συν^2x + συν\,x = 0$

$συνx\,(2συνx + 1) = 0$

$συνx = 0$ ή $2συνx + 1 = 0$

- $συνx = 0 \Leftrightarrow x = kπ + \frac{π}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $2συνx + 1 = 0 \Leftrightarrow 2συνx = -1$

  $συνx = -\frac{1}{2}$

  $συνx = -συν\frac{π}{3} = συν\left(π - \frac{π}{3}\right) = συν\frac{2π}{3}$

  $x = 2kπ \pm \frac{2π}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

## 10.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $συνx - 2ημ^2\frac{x}{2} = 0$

**Λύση**

$συνx - 2ημ^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow συνx - (1 - συνx) = 0$

$συνx - 1 + συνx = 0$

$2συνx = 1$

$συνx = \frac{1}{2}$

$συνx = συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow x = 2kπ \pm \frac{π}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

## 10.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $2 - συν^2x = 4ημ^2\frac{x}{2}$

**Λύση**

$2 - συν^2x = 4ημ^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 - συν^2x = 4\,\frac{1-συνx}{2}$

$2 - συν^2x = 2 - 2συνx$

$συν^2x - 2συνx = 0$

$συνx\,(συνx - 2) = 0$

$συνx = 0$ ή $συνx - 2 = 0$

- $συνx = 0 \Leftrightarrow x = kπ + \frac{π}{2},\quad k \in \mathbb{Z}$
- $συνx - 2 = 0 \Leftrightarrow συνx = 2$ αδύνατη αφού $-1 \le συνx \le 1$

## 10.iv)

Να λύσετε την εξίσωση $συν^2x - 1 = 2συν^2\frac{x}{2}$

**Λύση**

$συν^2x - 1 = 2συν^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow συν^2x - 1 = 1 + συνx$

$συν^2x - συνx - 2 = 0$

$Δ = 1 + 8 = 9,\qquad συνx = \frac{1 \pm 3}{2} = 2$ ή $-1$

- $συνx = 2$ αδύνατη αφού $-1 \le συνx \le 1$
- $συνx = -1 \quad συνx = συνπ \quad x = 2kπ \pm π,\quad k \in \mathbb{Z}$

# Β΄ Ομάδας

**1.**

Αν $0 \le \alpha < \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha = \sqrt{1-\eta\mu 2\alpha}$

**Λύση**

$0 \le \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sigma\upsilon\nu\alpha \le 1$ και $0 \le \eta\mu\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha > 0$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha = \sqrt{1-\eta\mu 2\alpha} \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2 = 1 - \eta\mu 2\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\;\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - 2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\;\eta\mu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \quad \text{που ισχύει}$$

**2.**

Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = 2\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

**Λύση**

$$\frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}$$

$$= \frac{2\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}$$

$$= \frac{2\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$= \frac{2\cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = 2\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

**3.**

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\frac{\pi}{8} - \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{8}$

**Λύση**

Επειδή $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8} = \eta\mu\frac{\pi}{8}$

$$\eta\mu^2\frac{\pi}{8} - \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \eta\mu^2\frac{\pi}{8} - \eta\mu^4\frac{\pi}{8}$$

$$= \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\left(1-\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\ 4\ \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\eta\mu\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\eta\mu\frac{2\pi}{8}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\ \eta\mu^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{8}$$

**4.i)**

Να αποδείξετε ότι $\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi2\alpha}{2}$

**Λύση**

$$\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha} = \frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha+\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha+2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+1}{\varepsilon\varphi\alpha}} = \frac{\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+1}{\varepsilon\varphi\alpha}} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{1}{2}\ \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{1}{2}\ \varepsilon\varphi2\alpha$$

**4.ii)**

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3-4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha$

**Λύση**

$$\frac{3-4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha} = \frac{3-4\sigma\upsilon\nu2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1}{3+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1}$$

$$= \frac{2-4\sigma\upsilon\nu2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{2+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}$$

$$= \frac{2(1-2\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha)}{2(1+2\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha)}$$

$$= \frac{1-2(1-2\eta\mu^2\alpha)+(1-2\eta\mu^2\alpha)^2}{1+2(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)+(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{1-2+4\eta\mu^2\alpha+1-4\eta\mu^2\alpha+4\eta\mu^4\alpha}{1+4\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2+4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1}$$

$$= \frac{4\eta\mu^4\alpha}{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha$$

**5.**

Να αποδείξετε ότι $εφ(45^o - α) = \dfrac{συν2α}{1+ημ2α} = \dfrac{1}{συν2α} - εφ2α$

και με τη βοήθεια αυτού του τύπου να υπολογίσετε την $εφ15^o$

**Λύση**

$$εφ(45^o - α) = \frac{εφ45^0 - εφα}{1+εφ45^0 εφα}$$

$$= \frac{1-εφα}{1+εφα}$$

$$= \frac{1-\dfrac{ημα}{συνα}}{1+\dfrac{ημα}{συνα}}$$

$$= \frac{\dfrac{συνα-ημα}{συνα}}{\dfrac{συνα+ημα}{συνα}} =$$

$$= \frac{συνα-ημα}{συνα+ημα}$$

$$= \frac{(συνα-ημα)(συνα+ημα)}{(συνα+ημα)^2} =$$

$$= \frac{συν^2α - ημ^2α}{συν^2α + 2ημασυνα + ημ^2α} = \frac{συν2α}{1+ημ2α}$$

$$\frac{1}{συν2α} - εφ2α = \frac{1}{συν2α} - \frac{ημ2α}{συν2α}$$

$$= \frac{1-ημ2α}{συν2α}$$

$$= \frac{(1-ημ2α)(1+ημ2α)}{συν2α(1+ημ2α)}$$

$$= \frac{1-ημ^2 2α}{συν2α(1+ημ2α)}$$

$$= \frac{συν^2 2α}{συν2α(1+ημ2α)} = \frac{συν2α}{1+ημ2α}$$

Για $α = 30^o$ έχουμε $εφ(45^o - 30^o) = \dfrac{συν(2\cdot 30^0)}{1+ημ(2\cdot 30^0)} \Rightarrow$

$$εφ15^o = \frac{συν60^0}{1+ημ60^0} = \frac{\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

**6.i)**

Να λυθεί η εξίσωση εφ2x = 2συνx

**Λύση**

Για να ορίζεται η εφ2x, πρέπει $2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{εφ}2x = 2\text{συν}x \Leftrightarrow \frac{\text{ημ}2x}{\text{συν}2x} = 2\text{συν}x$$

$$\text{ημ}2x = 2\text{συν}x\ \text{συν}2x$$

$$2\text{ημ}x\ \text{συν}x - 2\text{συν}x\ \text{συν}2x = 0$$

$$2\text{συν}x(\text{ημ}x - \text{συν}2x) = 0$$

$$\text{συν}x = 0 \quad \text{ή} \quad \text{ημ}x - \text{συν}2x = 0$$

- $\text{συν}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\text{ημ}x - \text{συν}2x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}2x \Leftrightarrow$

$$\text{συν}2x = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**6.ii)**

Να λυθεί η εξίσωση εφx εφ2x = – 3

**Λύση**

Για να ορίζεται η εφx και η εφ2x, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{εφ}x\ \text{εφ}2x = -3 \Leftrightarrow \text{εφ}x \frac{2\text{εφ}x}{1-\text{εφ}^2x} = -3$$

$$2\text{εφ}^2x = -3 + 3\text{εφ}^2x$$

$$\text{εφ}^2x = 3 \Leftrightarrow \text{εφ}x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \text{εφ}x = -\sqrt{3}$$

- $\text{εφ}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{εφ}x = \text{εφ}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \iff \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \iff \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{3}) \iff x = k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

**7.**

Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$

**Λύση**

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 4\alpha &= 2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - 1\\ &= 2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1\right) - 1\\ &= 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2 - 1 = 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1\end{aligned}$$

**8.i)**

Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}$

**Λύση**

$$\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} = \left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{4+4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{6+4\sqrt{2}}{16} = \frac{3+2\sqrt{2}}{8} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{\pi}{4})}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{4-4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{6-4\sqrt{2}}{16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8} \qquad \textbf{(2)}$$

(1) + (2) $\Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

## 8.ii)

Να αποδείξετε ότι $ημ^4\frac{π}{8} + ημ^4\frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$

**Λύση**

$$ημ^4\frac{π}{8} = \left(ημ^2\frac{π}{8}\right)^2 = \left(\frac{1-συν\frac{π}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{6-4\sqrt{2}}{16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8} \qquad \textbf{(3)}$$

$$ημ^4\frac{3π}{8} = \left(ημ^2\frac{3π}{8}\right)^2 = \left(\frac{1-συν\frac{3π}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-συν(π-\frac{π}{4})}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1+συν\frac{π}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{4+4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{6+4\sqrt{2}}{16} = \frac{3+2\sqrt{2}}{8} \qquad \textbf{(4)}$$

(3) + (4) $\Rightarrow$ $ημ^4\frac{π}{8} + ημ^4\frac{3π}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

## 8.iii)

Να αποδείξετε ότι $8ημ^2ασυν^2α = 1-συν4α$

**Λύση**

$$8ημ^2ασυν^2α = 1-συν4α \Leftrightarrow 2(2ημα\ συνα)^2 = 1-(1-2ημ^2 2α)$$

$$2ημ^2 2α = 1-1+2ημ^2 2α \qquad \text{που ισχύει}$$

**9.**

Αν $συνx = \frac{α}{β+γ}$, $συνy = \frac{β}{γ+α}$ και $συνz = \frac{γ}{α+β}$ , να αποδείξετε ότι

$εφ^2\frac{x}{2} + εφ^2\frac{y}{2} + εφ^2\frac{z}{2} = 1$

**Λύση**

Από τον τύπο $εφ^2α = \frac{1-συν2α}{1+συν2α}$, για $α = \frac{x}{2}$ έχουμε

$$εφ^2\frac{x}{2} = \frac{1-συνx}{1+συνx} = \frac{1-\frac{α}{β+γ}}{1+\frac{α}{β+γ}} = \frac{β+γ-α}{β+γ+α} \quad \textbf{(1)} \quad \text{και κυκλικά}$$

$$εφ^2\frac{y}{2} = \text{……………………} = \frac{γ+α-β}{β+γ+α} \quad \textbf{(2)}$$

$$εφ^2\frac{z}{2} = \text{……………………} = \frac{α+β-γ}{β+γ+α} \quad \textbf{(3)}$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow εφ^2\frac{x}{2} + εφ^2\frac{y}{2} + εφ^2\frac{z}{2} = \frac{α+β+γ}{β+γ+α} = 1$$