9.1 – 9.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 185 -186

Ερωτήσεις κατανόησης

1.
Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8 . Ποιο είναι το μήκος της διαμέσου ΑΜ ;

Λύση

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 36 + 64 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad B\Gamma = 10$ και $AM = \frac{B\Gamma}{2} = 5$

2.
Αν ο λόγος των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι

α .2 β.4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

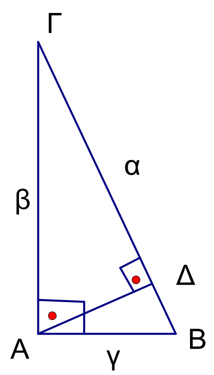
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντηση σας

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$

$4^2 = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$



3.
Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9cm και 12cm. . Η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου που έχει περίμετρο ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με

α. 10 β 12 γ.13 δ.14

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και δικαιολογήστε την απάντηση σας

Λύση

Πυθαγόρειο : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 81+144 = 225 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15$

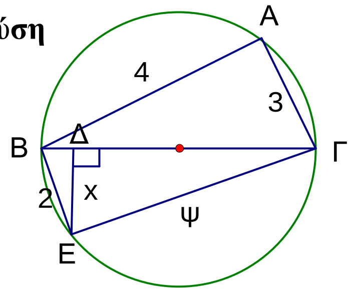
Περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου : $\Pi = 15 + 9 + 12 = 36$

Πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου : $x = \frac{36}{3} = 12$

4.

Στο παρακάτω σχήμα υπολογίστε τα x και ψ.

Λύση



Επειδή η γωνία $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη σε Ημικύκλιο, θα είναι ορθή.

$Β Γ^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \quad \Rightarrow \quad ΒΓ = 5$

$ΒΕ^2 = ΒΔ.ΒΓ \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 5ΒΔ \quad \Leftrightarrow \quad ΒΔ = \frac{4}{5}$

άρα $ΔΓ = 5 - \frac{4}{5} = \frac{21}{5}$

$x^2 = ΒΔ\ ΔΓ = \frac{84}{25} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\sqrt{21}}{5}$

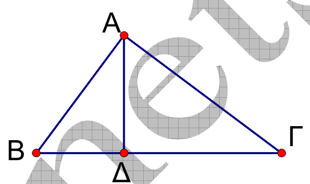
$\psi^2 = ΒΓ\ ΔΓ = 21 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \sqrt{21}$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1∟$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ = 3 και ΑΓ = 4, να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ και ΑΔ.

Λύση



$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \quad \Rightarrow$
$ΒΓ = 5$

$ΑΒ^2 = ΒΓ.\ ΒΔ \quad \Rightarrow \quad 3^2 = 5.\ ΒΔ \quad \Rightarrow \quad ΒΔ = \frac{9}{5}$

$ΑΓ^2 = ΒΓ.\ ΓΔ \quad \Rightarrow \quad 4^2 = 5.\ ΓΔ \quad \Rightarrow \quad ΓΔ = \frac{16}{5}$

$ΑΔ^2 = ΒΔ.\ ΔΓ = \frac{9}{5} . \frac{16}{5} = \frac{144}{25} \quad \Rightarrow \quad ΑΔ = \frac{12}{5}$

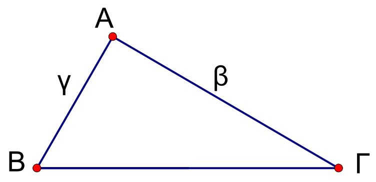
2.

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 1\llcorner)$ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\gamma}$ είναι

ίσος με: α. $\frac{1}{2}$ β. 1 γ. $\sqrt{3}$ δ. 2 ε. 3.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση



$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Rightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^o$$

$$3\hat{\Gamma} = 90^o$$

$$\hat{\Gamma} = 30^o \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Πυθαγόρειο: $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$$\beta^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4}$$

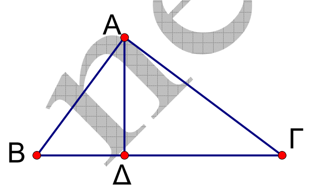
$$\beta^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{(2)}$$

(1), (2) $\Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \sqrt{3}$.

3.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 1\llcorner)$ φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι $AB = 5$ και $B\Delta = \frac{25}{13}$, να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.

Λύση



$$AB^2 = B\Gamma . B\Delta \Rightarrow 5^2 = B\Gamma . \frac{25}{13}$$

$$B\Gamma = 13 . \frac{13}{13} = \frac{169}{13} \quad \textbf{(1)}$$

$$\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta = 13 - \frac{25}{13} = \frac{169-25}{13} = \frac{144}{13} \quad \textbf{(2)}$$

$$A\Gamma^2 = \Gamma B . \Gamma\Delta = 13 . \frac{144}{13} = 144 \Rightarrow A\Gamma = 12 = 12 . \frac{13}{13} = \frac{156}{13} \quad \textbf{(3)}$$

$$A\Delta^2 = \Delta B . \Delta\Gamma = \frac{25}{13} . \frac{144}{13} \Rightarrow A\Delta = \frac{5.12}{13} = \frac{60}{13} \quad \textbf{(4)}$$

(1), (2), (3), (4) $\Rightarrow A\Delta < \Gamma\Delta < A\Gamma < B\Gamma$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2-\lambda^2$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με $\kappa > \lambda$, είναι ορθογώνιο.

Λύση

$\alpha^2 = \left(\kappa^2+\lambda^2\right)^2 = \kappa^4+2\kappa^2\lambda^2+\lambda^4$

$\beta^2 = 4\kappa^2\lambda^2$

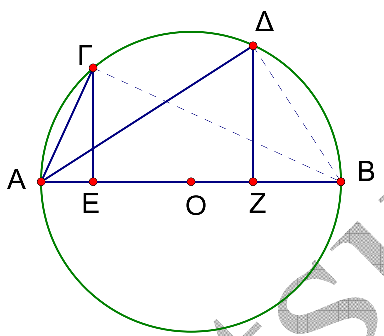
$\gamma^2 = \left(\kappa^2-\lambda^2\right)^2 = \kappa^4-2\kappa^2\lambda^2+\lambda^4$

Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

2.

Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι $\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΕ} \cdot \text{ΑΔ}^2$.

Λύση



Φέρουμε τις ΓΒ, ΔΒ.

$\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 1∟$ (βαίνει σε ημικύκλιο) $\Rightarrow$

τρ.ΓΑΒ ορθογώνιο με ύψος ΓΕ $\Rightarrow$

$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΕ} \Rightarrow$

$\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΕ}$ **(1)**

Ομοίως στο τρ.ΔΑΒ θα έχουμε

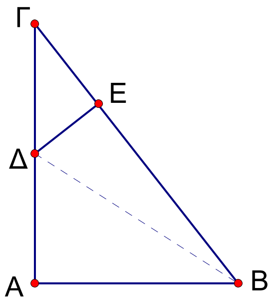
$\text{ΑΕ} \cdot \text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΕ} \cdot \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΖ}$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΕ} \cdot \text{ΑΔ}^2$.

3.

Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} =$ 1∟) και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι $\text{ΕΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = \text{ΕΒ}^2$. Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα $\Delta\text{Β}$, ΕΒ, ΕΓ.

Λύση



Φέρουμε τη $\Delta\text{Β}$ (για να έχουμε κι'άλλα ορθογώνια τρίγωνα)

Τρ.ΕΔΓ: $\text{ΕΓ}^2 = \text{Γ}\Delta^2 - \text{Ε}\Delta^2$

Τρ.ΑΒΔ: $\text{ΑΒ}^2 = \Delta\text{Β}^2 - \text{Α}\Delta^2$

Προσθέτουμε κατά μέλη, και επειδή $\text{Γ}\Delta = \text{Α}\Delta$, έχουμε $\text{ΕΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = \Delta\text{Β}^2 - \text{Ε}\Delta^2$. **(1)**

Τρ.ΔΕΒ: $\Delta\text{Β}^2 - \text{Ε}\Delta^2 = \text{ΕΒ}^2$

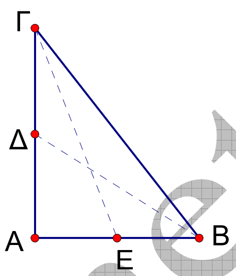
(1) $\Rightarrow$ $\text{ΕΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = \text{ΕΒ}^2$.

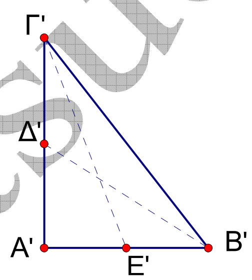
Από την ισότητα που αποδείξαμε προκύπτει ότι $\text{ΕΓ} < \text{ΕΒ}$.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ προκύπτει ότι $\text{ΕΒ} < \Delta\text{Β}$.
Άρα $\text{ΕΓ} < \text{ΕΒ} < \Delta\text{Β}$.

4.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$ ($\hat{A} = \hat{A}' =$ 1∟) έχουν $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ και $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\alpha = \alpha'$ **ii)** $\beta = \beta'$.
Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$.

Λύση





Τρ.ΔΑΒ: $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma^2 = \mu_\beta^2$

Τρ.Δ΄Α΄Β΄: $\left(\frac{\beta'}{2}\right)^2 + \gamma'^2 = \mu_{\beta'}^2$

Άρα $\frac{\beta^2}{4} + \gamma^2 = \frac{\beta'^2}{4} + \gamma'^2 \Rightarrow$

$\beta^2 + 4\gamma^2 = \beta'^2 + 4\gamma'^2$ **(1)**.

Ομοίως, από τα τρίγωνα ΓΑΕ, Γ΄Α΄Ε΄ θα έχουμε $\gamma^2 + 4\beta^2 = \gamma'^2 + 4\beta'^2$ **(2)**.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2): $5\beta^2 + 5\gamma^2 = 5\beta'^2 + 5\gamma'^2 \Rightarrow$

$\beta^2 + \gamma^2 = \beta'^2 + \gamma'^2$ **(3)** $\Rightarrow$

$\alpha^2 = \alpha'^2 \Rightarrow \alpha = \alpha'$

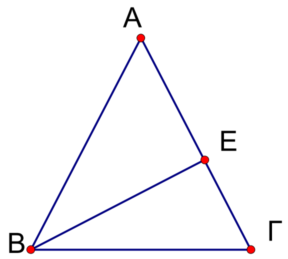
(1) – (3) $\Rightarrow 3\gamma^2 = 3\gamma'^2 \Rightarrow \gamma^2 = \gamma'^2 \Rightarrow \gamma = \gamma'$

Άρα τρ.ΑΒΓ = τρ.Α΄Β΄Γ΄.

5.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3ΒΕ^2+2ΑΕ^2+ΓΕ^2$.

Λύση



Τρ.ΕΒΓ: $\alpha^2 = ΒΕ^2 + ΓΕ^2$

Τρ.ΕΑΒ: $\gamma^2 = ΒΕ^2 + ΑΕ^2 = \beta^2$

Άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = ΒΕ^2 + ΓΕ^2 + 2(ΒΕ^2 + ΑΕ^2)$

$= ΒΕ^2 + ΓΕ^2 + 2\,ΒΕ^2 + 2\,ΑΕ^2$

$= 3ΒΕ^2 + 2\,ΑΕ^2 + ΓΕ^2$

Σύνθετα Θέματα

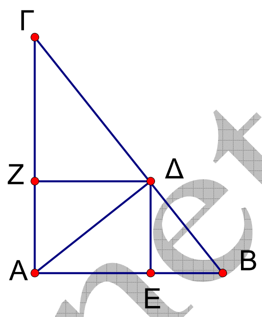
1.

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1∟$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{ΑΒ^3}{ΑΓ^3} = \dfrac{ΒΕ}{ΓΖ}$ **ii)** $ΑΔ^3 = ΒΓ\,.\,ΔΕ\,.\,ΔΖ$

Λύση

i)



Στο τρ.ΑΒΓ: $\dfrac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \dfrac{ΔΒ}{ΔΓ} \Rightarrow \dfrac{ΑΒ^4}{ΑΓ^4} = \dfrac{ΔΒ^2}{ΔΓ^2}$ **(1)**

Στο τρ.ΔΑΒ: $ΔΒ^2 = ΑΒ\,.\,ΒΕ$

Στο τρ.ΔΑΓ: $ΔΓ^2 = ΑΓ\,.\,ΓΖ$

(1) $\Rightarrow \dfrac{ΑΒ^4}{ΑΓ^4} = \dfrac{ΑΒ.ΒΕ}{ΑΓ.ΓΖ} \Rightarrow \dfrac{ΑΒ^3}{ΑΓ^3} = \dfrac{ΒΕ}{ΓΖ}$

ii)

Στο τρ.ΔΑΒ: $ΑΔ^2 = ΑΒ\,.\,ΑΕ = ΑΒ\,.\,ΔΖ$

Στο τρ.ΔΑΓ: $ΑΔ^2 = ΑΓ\,.\,ΑΖ = ΑΓ\,.\,ΔΕ$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη: $ΑΔ^4 = ΑΒ\,.\,ΔΖ\,.\,ΑΓ\,.\,ΔΕ \Rightarrow$

$$ΑΔ^3 = \frac{ΑΒ.ΑΓ}{ΑΔ}\,ΔΕ\,.\,ΔΖ$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{ΑΒ.ΑΓ}{ΑΔ} = ΒΓ$, ή ότι $\dfrac{ΑΒ}{ΑΔ} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΓ}$, το οποίο ισχύει από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ.

2.

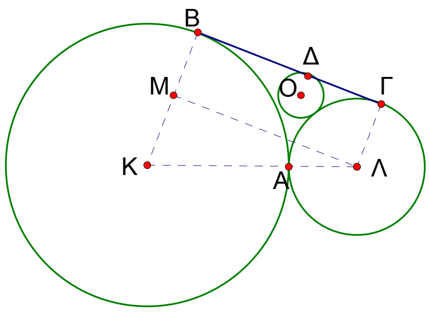
Δίνονται δύο κύκλοι $(Κ, R)$ και $(Λ, ρ)$ που εφάπτονται εξωτερικά στο $Α$.

Αν $ΒΓ$ είναι κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και $(Ο, σ)$ ο κύκλος που εφάπτεται στους $(Κ, R)$, $(Λ, ρ)$ και στη $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

i) $ΒΓ = 2\sqrt{Rρ}$ **ii)** $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{ρ}} = \frac{1}{\sqrt{σ}}$

Λύση

i)



Φέρουμε τις $ΚΑΛ$, $ΚΒ$, $ΛΓ$ και $ΛΜ \perp ΚΒ$.

Τότε $ΒΓΛΜ$ ορθογώνιο $\Rightarrow$

$ΚΜ = ΚΒ - ΜΒ = R - ΛΓ = R - ρ$

Πυθαγόρειο στο τρ.$ΜΚΛ$

$$ΜΛ^2 = ΚΛ^2 - ΚΜ^2 \Rightarrow$$

$$ΒΓ^2 = (R+ρ)^2 - (R-ρ)^2$$

$$ΒΓ^2 = R^2 + 2Rρ + ρ^2 - (R^2 - 2Rρ + ρ^2)$$

$$ΒΓ^2 = R^2 + 2Rρ + ρ^2 - R^2 + 2Rρ - ρ^2$$

$$ΒΓ^2 = 4\ Rρ \Rightarrow ΒΓ = 2\sqrt{Rρ}$$

ii)

Εφαρμόζουμε το i) για τους κύκλους $(Κ, R)$, $(Ο, σ)$ με κοινή εξωτερική εφαπτομένη $ΒΔ$ και για τους κύκλους $(Λ, ρ)$, $(Ο, σ)$ με κοινή εξωτερική εφαπτομένη $ΔΓ$. Τότε $ΒΔ = 2\sqrt{Rσ}$ και $ΔΓ = 2\sqrt{ρσ}$.

$ΒΔ + ΔΓ = ΒΓ \Rightarrow 2\sqrt{Rσ} + 2\sqrt{ρσ} = 2\sqrt{Rρ} \Rightarrow \sqrt{Rσ} + \sqrt{ρσ} = \sqrt{Rρ}$

Διαιρούμε τα δύο μέλη με $\sqrt{Rρσ}$, τότε $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{ρ}} = \frac{1}{\sqrt{σ}}$

3.

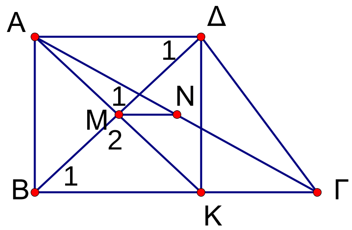
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$. Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο

ii) $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

Λύση

i)



Τρ.ΜΑΔ = τρ.ΜΚΒ διότι
ΜΔ = ΜΒ
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατά κορυφή) και
$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ).

Άρα ΜΑ = ΜΚ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΒΚΔ διχοτομούνται, άρα είναι παρ/μμο και επειδή έχει γωνία ορθή, είναι ορθογώνιο.

ii)

Πυθαγόρειο στο τρ.ΔΚΓ: $\Delta\Gamma^2 - \Delta K^2 = K\Gamma^2$ **(1)**
Από το i) έχουμε ΔΚ = ΑΒ.
Στο τρίγωνο ΑΚΓ, το ΜΝ ενώνει μέσα $\Rightarrow$ ΚΓ = 2ΜΝ.

(1) $\Rightarrow$ $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = (2MN)^2$ $\Rightarrow$ $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

4.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) να αποδείξετε ότι $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\cdot\gamma$.

Λύση

Ισχύει $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$. Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \geq \beta\cdot\gamma$, ή

αρκεί να αποδείξουμε ότι $2\,\frac{\alpha^2}{4} \geq \beta\cdot\gamma$, ή

$\alpha^2 \geq 2\beta\cdot\gamma$.

Επειδή, όμως, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta\cdot\gamma$, ή ότι

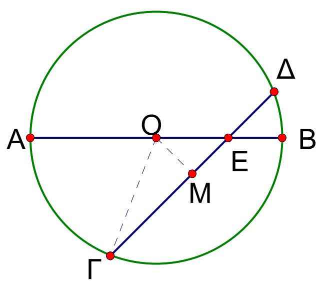
$\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\gamma \geq 0$, ή ότι

$(\beta - \gamma)^2 \geq 0$, που ισχύει.

5.

Θεωρούμε κύκλο (O, R), διάμετρό του AB και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την AB στο E και σχηματίζει με αυτή γωνία 45^o. Να αποδείξετε ότι
$E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2$.

Λύση



Φέρουμε $OM \perp \Gamma\Delta$ και την ακτίνα ΟΓ.
Τότε, το M είναι μέσο της ΓΔ και το τρίγωνο OME ορθογώνιο και ισοσκελές.

$$E\Gamma^2 + E\Delta^2 = (EM + M\Gamma)^2 + (\Delta M - EM)^2$$
$$= EM^2 + 2\,EM \cdot M\Gamma + M\Gamma^2 +$$
$$\Delta M^2 - 2\,\Delta M \cdot EM + EM^2$$
$$= 2\,EM^2 + 2\,M\Gamma^2$$
$$= 2\,(OM^2 + M\Gamma^2) \qquad \textbf{(1)}$$

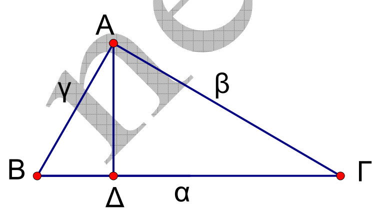
Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΜΟΓ $\Rightarrow$ $OM^2 + M\Gamma^2 = O\Gamma^2 = R^2$.

(1) $\Rightarrow$ $E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2\,R^2$.

6.

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώνων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ, ΑΒΓ, τότε $x^2 + y^2 = \omega^2$.

Λύση



Τρ.ΑΔΒ όμοιο του τρ.ΑΒΓ $\Rightarrow$

$$\frac{x}{\omega} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \frac{x^2}{\omega^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Τρ.ΑΔΓ όμοιο του τρ.ΑΒΓ $\Rightarrow$

$$\frac{y}{\omega} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \frac{y^2}{\omega^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{x^2}{\omega^2} + \frac{y^2}{\omega^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{\omega^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{\omega^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = \omega^2$$