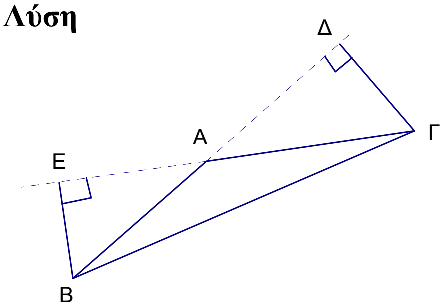
9.4
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 194

Ερωτήσεις κατανόησης

1.
Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά

Λύση



i) $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΒ.ΑΔ$

ii) $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΓ.ΑΕ$

2.
Να βρεθεί το είδος των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ όταν

i) $β^2 = 3α^2 + γ^2$

ii) $γ^2 = α^2 - β^2$

iii) $α^2 - β^2 = 2γ^2$

Λύση

i) $β^2 = 3α^2 + γ^2 > α^2 + γ^2 \Rightarrow \hat{Β} > 90^o$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

ii) $γ^2 = α^2 - β^2 \Leftrightarrow α^2 = β^2 + γ^2 \Leftrightarrow \hat{Α} = 90^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

iii) $α^2 - β^2 = 2γ^2 \Rightarrow α^2 = β^2 + 2γ^2 > β^2 + γ^2 \Rightarrow \hat{Α} > 90^o$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

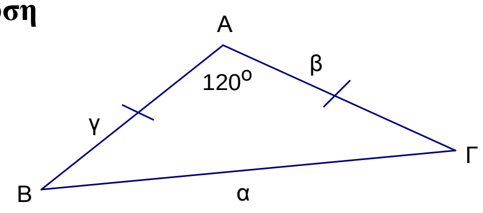
3.
Αν β η <u>μεγαλύτερη</u> πλευρά αμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε $β^2 > α^2 + γ^2$

(Να συμπληρώσετε τα κενά)

4.

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 120^o$, να δικαιολογήσετε γιατί $\alpha^2 = 3\beta^2$

Λύση



Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A} \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2 - 2\beta^2\text{συν}120^o$

$\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2 - 2\beta^2(-\frac{1}{2}) = 3\beta^2$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 6\mu$, $\beta = 5\mu$, $\gamma = 4\mu$, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Λύση

Για να υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ πρέπει και αρκεί

$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \quad \Leftrightarrow \quad |5\mu - 4\mu| < 6\mu < 5\mu + 4\mu$

$\mu < 6\mu < 9\mu$, που ισχύει.

Άρα υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

$\alpha^2 = 36\mu^2$

$\beta^2 + \gamma^2 = 25\mu^2 + 16\mu^2 = 41\mu^2$

Άρα $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A}$ οξεία.

Η γωνία $\hat{A}$ βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά α, άρα είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου. Και επειδή αυτή είναι οξεία, θα είναι και οι άλλες. Άρα το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

2.

Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α = 6, β = 5, γ = 4; Αν ναι, να υπολογισθούν τα ύψη του τριγώνου.

Λύση

Για να υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ πρέπει και αρκεί

$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \quad \Leftrightarrow \quad |5-4|<6<5+4$$

$$1<6<9, \quad \text{που ισχύει.}$$

Άρα υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

$$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \frac{2}{6}\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-6\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-4\right)} =$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15^2.7}{16}}=\frac{15\sqrt{7}}{3.4}=\frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

Ομοίως $\upsilon_\beta=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ και $\upsilon_\gamma=\dfrac{15\sqrt{7}}{8}$

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{3}$, $\gamma=2$. Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{A}$.

Λύση

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot\text{συν}\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2^2-2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\text{συν}\hat{A}$$

$$2=1+2\sqrt{3}+3+4-4\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\text{συν}\hat{A}$$

$$-6-2\sqrt{3} = -4\left(1+\sqrt{3}\right)\text{συν}\hat{A}$$

$$6+2\sqrt{3} = 4\left(1+\sqrt{3}\right)\text{συν}\hat{A}$$

$$2\left(3+\sqrt{3}\right) = 4\left(1+\sqrt{3}\right)\text{συν}\hat{A}$$

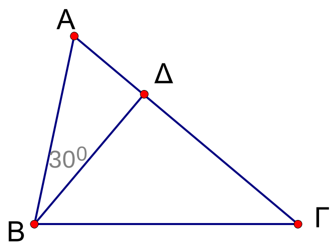
$$\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right) = 2\left(1+\sqrt{3}\right)\text{συν}\hat{A}$$

$$\text{συν}\hat{A}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{A}=30^o.$$

4.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 4$, $ΑΓ = 5$ και $Α\hat{Β}Δ = 30^o$, όπου $ΒΔ$ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του $ΒΓ$.

Λύση



Στο τρίγωνο $ΔΑΒ$ θα έχουμε $\hat{Α} = 60^o$

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ \cdot συν\hat{Α}$$

$$α^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot συν60^0$$

$$α^2 = 25 + 16 - 40 \cdot \frac{1}{2}$$

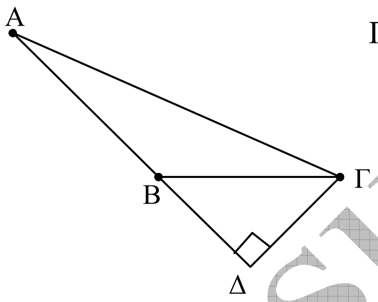
$$α^2 = 41 - 20 = 21 \quad \Rightarrow \quad α = \sqrt{21}$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Οι πλευρές ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ έχουν μήκη $ΑΒ = 9$, $ΒΓ = 7$ και $ΑΓ = 12$. Να υπολογισθεί το μήκος της προβολής της $ΒΓ$ πάνω στην $ΑΒ$.

Λύση



$ΓΔ \perp ΑΒ \quad \Rightarrow \quad ΒΔ$ η προβολή της $ΒΓ$ πάνω στην $ΑΒ$.

$$ΑΓ^2 = 12^2 = 144$$

$$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 130$$

Άρα $ΑΓ^2 > ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{Β}$ αμβλεία.

Άρα $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ.ΒΔ$

$$144 = 130 + 2.9.\ ΒΔ$$

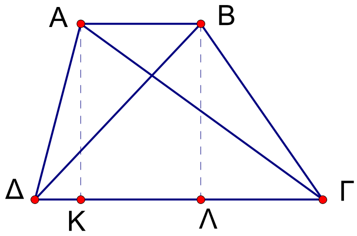
$$18\ ΒΔ = 14 \quad \Rightarrow \quad ΒΔ = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

2.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι

$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2\ ΑΒ \,.\, ΓΔ$

Λύση



Έστω $\hat{Γ}, \hat{Δ}$ οξείες.

Φέρουμε ΑΚ και ΒΛ κάθετες στη ΓΔ.

Τρ.ΑΔΓ: $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 - 2\ ΔΓ \cdot ΔΚ$

Τρ.ΒΔΓ: $ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΔΓ^2 - 2\ ΔΓ \cdot ΓΛ$

Προσθέτουμε κατά μέλη: $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2\ ΔΓ^2 - 2\ ΔΓ \cdot ΔΚ - 2\ ΔΓ \cdot ΓΛ$

$$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2\ ΔΓ \cdot (ΔΓ - ΔΚ - ΓΛ)$$

$$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2\ ΔΓ \cdot ΚΛ \qquad \mathbf{(1)}$$

ΑΒΛΚ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΚΛ = ΑΒ

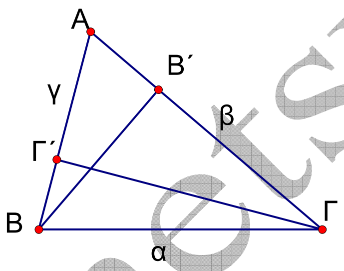
(1) $\Rightarrow$ $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2\ ΔΓ \cdot ΑΒ$

3.

Αν ΒΒ΄, ΓΓ΄ είναι ύψη ενός οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$α^2 = β\ ΓΒ' + γ\ ΒΓ'$.

Λύση



$γ^2 = α^2 + β^2 - 2\ β\ ΓΒ'$

$β^2 = α^2 + γ^2 - 2\ γ\ ΒΓ'$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$β^2 + γ^2 = 2\,α^2 + β^2 + γ^2 - 2\ (\ β\ ΓΒ' + γ\ ΒΓ'\ ) \Rightarrow$

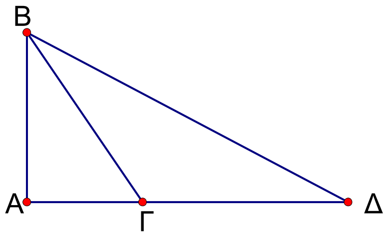
$2\ (\ β\ ΓΒ' + γ\ ΒΓ'\ ) = 2\,α^2 \quad \Rightarrow$

$β\ ΓΒ' + γ\ ΒΓ' = α^2$

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1∟$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ^2 = 2\,ΒΓ\,.\,ΑΔ$.

Λύση



Τρ.ΒΓΔ: $ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + 2\,ΓΔ \cdot ΑΓ$

$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΒΓ^2 + 2\,ΒΓ \cdot ΑΓ$

$ΒΔ^2 = 2\,ΒΓ^2 + 2\,ΒΓ \cdot ΑΓ$

$ΒΔ^2 = 2\,ΒΓ\,(\,ΒΓ + ΑΓ\,)$

$ΒΔ^2 = 2\,ΒΓ\,(\,ΓΔ + ΑΓ\,)$

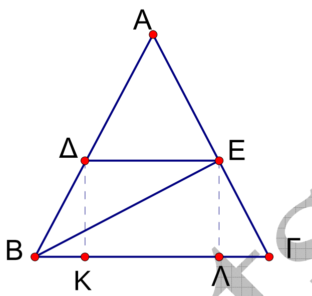
$ΒΔ^2 = 2\,ΒΓ \cdot ΑΔ$

5.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε παράλληλη της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΔΕ$.

Λύση



Φέρουμε ΔΚ, ΕΛ κάθετες στη ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε

$ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ^2 - 2\,ΒΓ \cdot ΛΓ \quad \Rightarrow$

$ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ\,(ΒΓ - 2\,ΛΓ)$ **(1)**

τρ.ΔΚΒ = τρ.ΕΛΓ $\Rightarrow$ ΒΚ = ΛΓ.

Άρα $ΒΓ - 2\,ΛΓ = ΒΓ - ΛΓ - ΒΚ = ΚΛ = ΔΕ$

(1) $\Rightarrow$ $ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΔΕ$.

6.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) με πλευρές α, β, γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α , 4β , 3γ ;

Λύση

Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\Rightarrow$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Πρέπει να ισχύει $5\alpha < 4\beta + 3\gamma \Leftrightarrow (5\alpha)^2 < (4\beta + 3\gamma)^2$

$25\alpha^2 < 16\beta^2 + 24\beta\gamma + 9\gamma^2$

$25(\beta^2 + \gamma^2) < 16\beta^2 + 24\beta\gamma + 9\gamma^2$

$25\beta^2 + 25\gamma^2 < 16\beta^2 + 24\beta\gamma + 9\gamma^2$

$9\beta^2 + 16\gamma^2 - 24\beta\gamma < 0$

$(3\beta - 4\gamma)^2 < 0$ που είναι αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30^o$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Λύση

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu 30^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \beta^2 - 2\beta^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha^2 = 2\beta^2 - \beta^2\sqrt{3}$

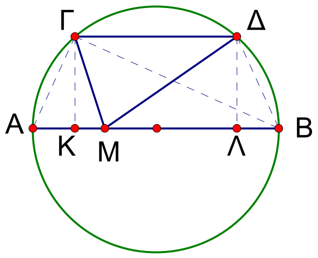
$\alpha^2 = \beta^2(2 - \sqrt{3})$

$\alpha = \beta\sqrt{2-\sqrt{3}}$

2.

Δίνεται κύκλος διαμέτρου AB και μία χορδή του $\Gamma\Delta \parallel AB$. Αν M είναι τυχαίο σημείο της AB, να αποδείξετε ότι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2$.

Λύση



Φέρουμε τις ΓA, ΔB, ΓB και έστω K, Λ οι προβολές των Γ, Δ στην AB.
Τότε $AB\Delta\Gamma$ ισοσκελές τραπέζιο, $\Gamma K\Lambda\Delta$ ορθογώνιο και $AK = \Lambda B$

Τρ.ΜΑΓ: $M\Gamma^2 = MA^2 + A\Gamma^2 - 2\, MA \cdot AK$
Τρ.ΜΔΒ: $M\Delta^2 = MB^2 + \Delta B^2 - 2\, MB \cdot B\Lambda$

Προσθέτουμε: $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2 + 2\, A\Gamma^2 - 2\, MA \cdot AK - 2\, MB \cdot B\Lambda$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $2\, A\Gamma^2 - 2\, MA \cdot AK - 2\, MB \cdot B\Lambda = 0$, ή
$A\Gamma^2 - MA \cdot AK - MB \cdot B\Lambda = 0$.

Όμως, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε $A\Gamma^2 = AK \cdot AB$, οπότε
αρκεί να αποδείξουμε ότι $AK \cdot AB - MA \cdot AK - MB \cdot AK = 0$, ή
$AB - MA - MB = 0$, που ισχύει.

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha^3=\beta^3+\gamma^3$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Λύση

Από την υπόθεση $\alpha^3=\beta^3+\gamma^3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{lll} \alpha^3>\beta^3 & \text{και} & \alpha^3>\gamma^3 \\ \alpha>\beta & \text{και} & \alpha>\gamma \\ \alpha\beta^2>\beta\beta^2 & \text{και} & \alpha\gamma^2>\gamma\gamma^2 \\ \alpha\beta^2>\beta^3 \quad \mathbf{(1)} & \text{και} & \alpha\gamma^2>\gamma^3 \quad \mathbf{(2)} \end{array}$$

(1) + (2) $\Rightarrow \alpha\beta^2+\alpha\gamma^2>\beta^3+\gamma^3$

$$\alpha(\beta^2+\gamma^2)>\alpha^3$$

$$\beta^2+\gamma^2>\alpha^2 \Rightarrow \hat{A} \text{ οξεία.}$$

Επειδή όμως $\alpha>\beta$ και $\alpha>\gamma$, δηλαδή η α είναι η μεγαλύτερη πλευρά, η $\hat{A}$ θα είναι η μεγαλύτερη γωνία. Άρα το τρίγωνο οξυγώνιο

Να μας επιτραπεί να συμπληρώσουμε ότι είναι και $\hat{A}>60^o$

Απόδειξη

$\alpha^3=\beta^3+\gamma^3 \Rightarrow \alpha\cdot\alpha^2=(\beta+\gamma)(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)$

και επειδή $\alpha<\beta+\gamma$, θα είναι $\alpha^2>\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$

αλλά $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}\hat{A}$,

άρα $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}\hat{A}>\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$

$$-2\beta\gamma\,\text{συν}\hat{A}>-\beta\gamma$$

$$\text{συν}\hat{A}<\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}>60^o$$