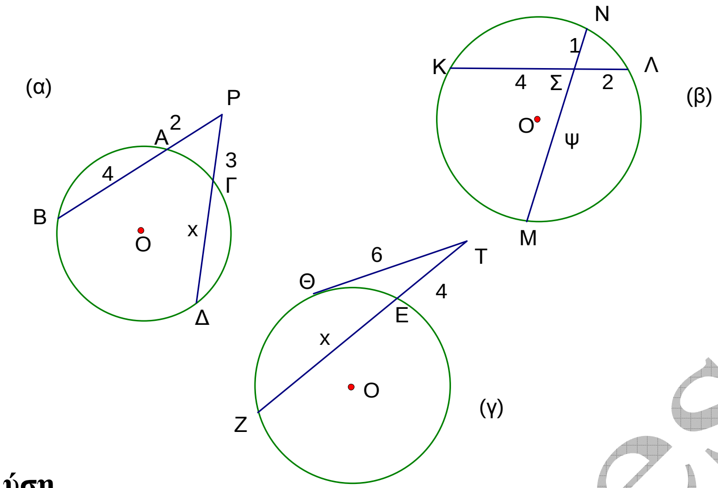
9.7
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 203 – 204

Ερωτήσεις κατανόησης

1.
Στα παρακάτω σχήματα να υπολογιστούν οι τιμές των x και ψ.



Λύση

Στο σχήμα (α)

ΡΑ . ΡΒ = ΡΓ . ΡΔ

2(2 + 4) = 3(3+x)

4 + 8 = 9 + 3x

x = 1

Στο σχήμα (β)

ΣΚ . ΣΛ = ΣΜ . ΣΝ

4. 2 = ψ. 1

8 = ψ

Στο σχήμα (γ)

$T\Theta^2 = TE\,.TZ$

36 = 4(4+x)

9 = 4 + x

5 = x

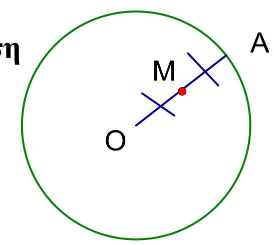
2.
Ποια είναι η δύναμη σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R) όταν Ρ ≡ Ο

Λύση

$\Delta^{P}_{(O,R)} = OP^2 - R^2 = -R^2$

3.
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\Delta^{M}_{(O,R)} = -3$, να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου

Λύση



$\Delta^{M}_{(O,R)} = OM^2 - R^2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = \frac{R^2}{4} - R^2$

$3R^2 = 12$

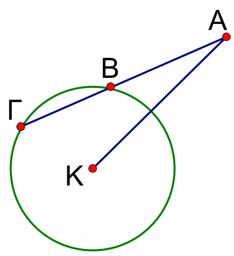
$R = 2$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Δίνεται κύκλος (Κ, 6) και σημείο Α, ώστε ΑΚ = 14. Αν από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ = 6, να υπολογίσετε το ΑΒ.

Λύση



Έστω $AB = x$, τότε $AΓ = x + 6$

$AB.\,AΓ = AK^2 - R^2 \quad \Rightarrow$

$x\,(x + 6) = 14^2 - 6^2$

$x^2 + 6x = 196 - 36$

$x^2 + 6x - 160 = 0 \qquad$ **(1)**

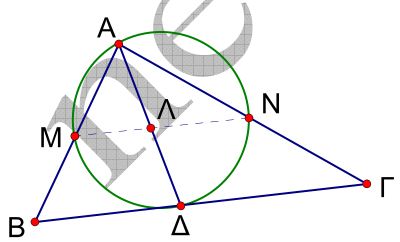
$Δ = 6^2 + 4.160 = 36 + 640 = 676$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{-6 \pm 26}{2} = \begin{cases} \dfrac{-6+26}{2} \\ \dfrac{-6-26}{2} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{20}{2} \\ \dfrac{-32}{2} \end{cases} = \begin{cases} 10 \\ -16 \end{cases} \quad \text{άρα } x = 10$$

2.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος, που διέρχεται από το Α και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, εφάπτεται της ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι $AΔ^2 = ΔB.ΔΓ$.

Λύση



Φέρουμε το τμήμα ΜΝ.

Τότε $MN \parallel BΓ$ και τέμνει το ΑΔ στο μέσο του Λ.

Άρα $MΛ = \parallel \dfrac{ΔB}{2}$ και $ΛN = \parallel \dfrac{ΔΓ}{2}$

ΑΛΔ, ΜΛΝ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow$

$ΛA \cdot ΛΔ = ΛM \cdot ΛN$

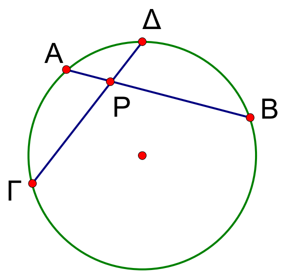
$\dfrac{1}{2}AΔ \cdot \dfrac{1}{2}AΔ = \dfrac{1}{2}ΔB \cdot \dfrac{1}{2}ΔΓ$

$AΔ^2 = ΔB.ΔΓ$.

3.

Θεωρούμε κύκλο (O, R) και τις χορδές του AB, $\Gamma\Delta$ που τέμνονται στο P. Αν ισχύει ότι $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$, να αποδείξετε ότι οι χορδές AB, $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

Λύση



APB, $\Gamma P\Delta$ τέμνουσες $\Rightarrow$ $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$

Από υπόθεση έχουμε $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη: $PA^2 = P\Delta^2$ $\Rightarrow$

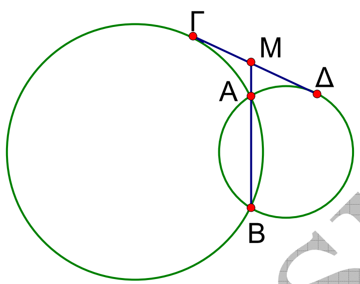
$PA = P\Delta$

Διαιρούμε κατά μέλη: $PB = P\Gamma$

4.

Να αποδείξετε ότι, η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

Λύση



Η κοινή χορδή AB τέμνει το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα σε σημείο M.

Είναι $M\Gamma^2 = MA \cdot MB$

και $M\Delta^2 = MA \cdot MB$

Άρα $M\Gamma^2 = M\Delta^2$ $\Rightarrow$ $M\Gamma = M\Delta$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

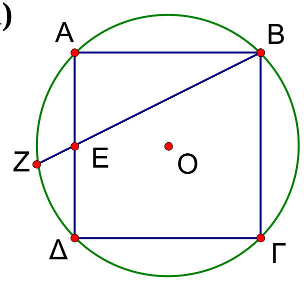
1.

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).
Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i) $BE = \dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, **ii)** $BE = 5EZ$

Λύση

i)



Πυθαγόρειο στο τρ.ΑΕΒ: $BE^2 = AB^2 + AE^2 \Rightarrow$

$$BE^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$$BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \quad \textbf{(1)}$$

ii)

$EB.\,EZ = EA\,.\,E\Delta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}\,EZ = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\alpha}{2}$

$$\sqrt{5}\,EZ = \frac{\alpha}{2}$$

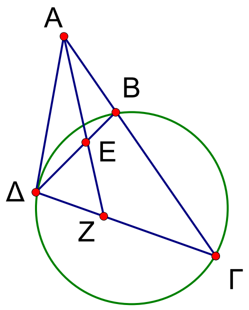
$$EZ = \frac{\alpha}{2\sqrt{5}} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{5}\,\frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $BE = 5EZ$.

2.

Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τις ΔΒ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΒ . ΖΓ = ΕΔ . ΖΔ.

Λύση



Θ. διχοτόμων στο τρ.ΑΒΔ: $\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$

Θ. διχοτόμων στο τρ.ΑΓΔ: $\frac{Z\Gamma}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$

Δημιουργούμε το γινόμενο ΕΒ . ΖΓ πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη

$$\frac{EB}{E\Delta}\,\frac{Z\Gamma}{Z\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}\,\frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{EB\cdot Z\Gamma}{E\Delta\cdot Z\Delta} = \frac{AB\cdot A\Gamma}{A\Delta^2}$$

(1)

επειδή όμως ΑΒΓ τέμνουσα και ΑΔ εφαπτομένη, θα έχουμε $A\Delta^2 = AB \,.\, A\Gamma$.

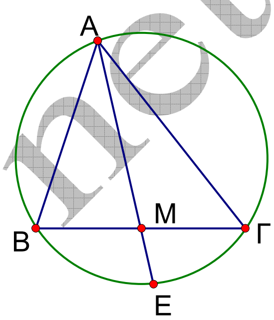
(1) $\Rightarrow \frac{EB\cdot Z\Gamma}{E\Delta\cdot Z\Delta} = 1 \Rightarrow EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$.

3.

Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε, να αποδείξετε ότι: **i)** $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$ **ii)** $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM\cdot AE$.

Λύση

i)



ΑΜΕ, ΒΜΓ τέμνουσες $\Rightarrow$ $MA\cdot ME = MB\cdot M\Gamma$

$MA \cdot ME = \frac{B\Gamma}{2}\,\frac{B\Gamma}{2}$

$MA \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$

ii)

1^o Θ. διαμέσων: $AB^2 + A\Gamma^2 = 2\,AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$

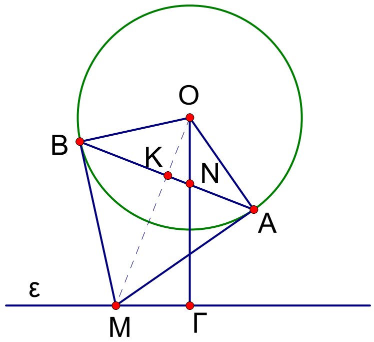
$= 2\,AM^2 + 2\,\frac{B\Gamma^2}{4}$

$\overset{(i)}{=} 2\,AM^2 + 2\,AM\cdot ME = 2\,AM\,(AM + ME) = 2AM\cdot AE.$

4.

Δίνεται κύκλος (O, R) και ευθεία ε που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο M της ε φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA, MB και $O\Gamma \perp \varepsilon$. Αν η AB τέμνει την $O\Gamma$ στο N, να αποδείξετε ότι $ON \cdot O\Gamma = R^2$.

Λύση



Φέρουμε την OM, η οποία είναι μεσοκάθετος της AB.

$\hat{K} = \hat{\Gamma} = 1\llcorner \Rightarrow$ $KN\Gamma M$ εγγράψιμο $\Rightarrow$

$$ON \cdot O\Gamma = OK \cdot OM \quad \textbf{(1)}$$

Τρ.BOM ορθογώνιο με ύψος BK $\Rightarrow$

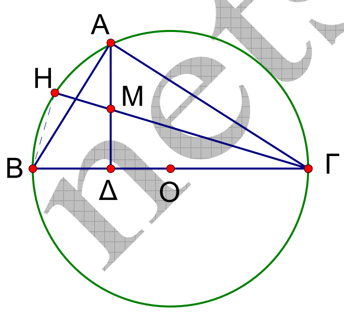
$$R^2 = OB^2 = OK \cdot OM \quad \textbf{(2)}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $ON \cdot O\Gamma = R^2$.

5.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\llcorner$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και το ύψος του $A\Delta$. Αν μεταβλητή ευθεία ε που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο M και τον κύκλο στο H, να αποδείξετε ότι $\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2$.

Λύση



Φέρουμε την HB.

$\hat{H} = 1\llcorner$ αφού βαίνει σε ημικύκλιο,
αλλά και $\hat{\Delta} = 1\llcorner$, οπότε $HM\Delta B$ εγγράψιμο $\Rightarrow$

$$\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma\Delta \cdot \Gamma B \quad \textbf{(1)}$$

Τρ.$AB\Gamma$ ορθογώνιο με ύψος $A\Delta$ $\Rightarrow$

$$A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot \Gamma B \quad \textbf{(2)}$$

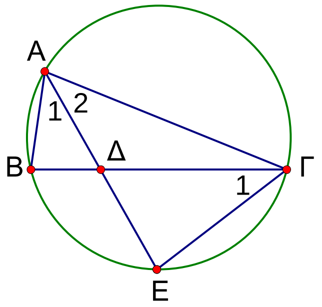
(1), (2) $\Rightarrow$ $\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2$.

Σύνθετα Θέματα

1.

Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και είναι $ΑΔ^2 = ΔΒ \,.\, ΔΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΕ^2 = 2\,ΕΓ^2$.

Λύση



ΑΔΕ, ΒΔΓ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow$

$ΔΑ \cdot ΔΕ = ΔΒ \cdot ΔΓ$, αλλά

$ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$ άρα

$ΑΔ^2 = ΔΑ \cdot ΔΕ \Rightarrow ΑΔ = ΔΕ$

τρ.ΑΕΓ όμοιο του τρ.ΓΕΔ ($\hat{Γ}_1 = \hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ και $\hat{Ε}$ κοινή)

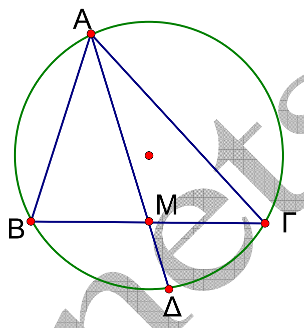
$$\Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΕΓ}{ΔΕ} \Rightarrow ΕΓ^2 = ΑΕ \cdot ΔΕ$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $ΑΕ^2 = 2\,ΑΕ \cdot ΔΕ$, ή ότι $ΑΕ = 2\,ΔΕ$ που ισχύει.

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $β^2 + γ^2 = 2\,α^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ, να αποδείξετε ότι $ΜΔ = \dfrac{α\sqrt{3}}{6}$.

Λύση



$1^{ο}$ Θ.διαμέσων: $β^2 + γ^2 = 2\,ΑΜ^2 + \dfrac{α^2}{2}$, αλλά

$β^2 + γ^2 = 2\,α^2$ άρα

$$2\,ΑΜ^2 + \frac{α^2}{2} = 2\,α^2 \Rightarrow 4\,ΑΜ^2 + α^2 = 4\,α^2$$

$$4\,ΑΜ^2 = 3\,α^2$$

$$ΑΜ = \frac{α\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{(1)}$$

ΑΜΔ, ΒΜΓ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow ΑΜ \,.\, ΜΔ = ΜΒ \,.\, ΜΓ \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\frac{α\sqrt{3}}{2}\,ΜΔ = \frac{α}{2}\,\frac{α}{2}$$

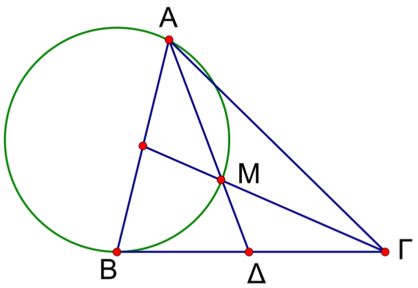
$$\sqrt{3}\,ΜΔ = \frac{α}{2}$$

$$ΜΔ = \frac{α}{2\sqrt{3}} = \frac{α\sqrt{3}}{6}$$

3.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Αν Μ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΜ εφάπτεται της ΒΓ στο Β.

Λύση



$\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \quad \Rightarrow \quad \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}\beta^2$

$\frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{3}{4}\beta^2$

$2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 = 3\beta^2$

$2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \qquad$ **(1)**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta B^2 = \Delta M \cdot \Delta A$

» » $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\mu_\alpha \mu_\alpha$

» » $\frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{3}\mu_\alpha^2$

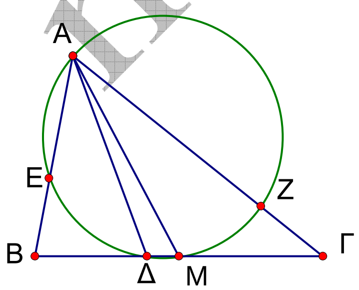
» » $3\alpha^2 = 4\mu_\alpha^2$

Έχουμε $4\mu_\alpha^2 = 4\,\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = 2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 \overset{(1)}{=} 2\cdot 2\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2$.

4.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, η διάμεσός του ΑΜ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Κ) του τριγώνου ΑΔΜ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΒ και ΑΓ με τον κύκλο (Κ) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

Λύση



ΒΔΜ, ΒΕΑ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow$

$BE \cdot BA = B\Delta \cdot BM$

ΓΜΔ, ΓΖΑ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow$

$\Gamma Z \cdot \Gamma A = \Gamma M \cdot \Gamma\Delta$

Διαιρούμε κατά μέλη: $\frac{BE}{\Gamma Z}\,\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

Αλλά από Θ. διχοτόμων είναι $\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$.

Άρα $\frac{BE}{\Gamma Z} = 1 \quad \Rightarrow \quad BE = \Gamma Z$