11.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 241 – 242

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Να χαρακτηρίστε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντηση σας .

i) $\lambda_6^2 + \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ Σ Λ

ii) $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = 3R(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ Σ Λ

iii) $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = \frac{R}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ Σ Λ

Απάντηση

i) $\lambda_6^2 + \lambda_3^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2 \neq 2R^2 = \lambda_4^2$

ii) $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = R + R\sqrt{2} + R\sqrt{3} = R(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \neq 3R(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

iii) $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

2.
Αν Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά σημεία ενός κύκλου (Ο, R) ώστε $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = \lambda_{12}$, $\Gamma\Delta = R$, να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου

Απάντηση

$AB = R\sqrt{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 90^o$,

$B\Gamma = \lambda_{12} \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = 30^o$ και

$\Gamma\Delta = R \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60^o$

Οπότε $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 90^o + 30^o + 60^o = 180^o$, άρα ΑΔ διάμετρος

3.

Αν Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία ενός κύκλου (Ο, R) ώστε $\overset{\frown}{AB} = 120^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60^o$, η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι

Α $(3+\sqrt{3})R$ Β. 4R Γ. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})R$ Δ. $(3+\sqrt{2})R$

Δικαιολογήστε την απάντηση σας .

Απάντηση

$\overset{\frown}{AB} = 120^o \Leftrightarrow AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$,

$\overset{\frown}{B\Gamma} = 60^o \Leftrightarrow B\Gamma = \lambda_6 = R$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 120^o + 60^o = 180^o$ οπότε η ΑΓ είναι διάμετρος

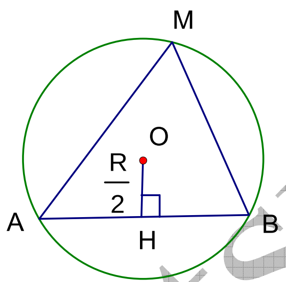
συνεπώς ΑΓ = 2R

Η περίμετρος του τριγώνου είναι

$AB + B\Gamma + \Gamma A = R\sqrt{3} + R + 2R = R(3+\sqrt{3})$ σωστό το Α.

4.

Στο παρακάτω σχήμα



Η γωνία Μ είναι

Α. 30^o Β .45^o Γ.50^o Δ. 60^o Ε. 75^o

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η Δ διότι : $OH = \frac{R}{2} = \alpha_3$ οπότε $\overset{\frown}{AB} = 120^o$

Επομένως $\hat{M} = 60^o$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O, R).

Λύση

$$E_3 = \frac{1}{2}P_3\alpha_3 = \frac{1}{2}3\lambda_3\,\alpha_3 = \frac{3}{2}\,R\sqrt{3}\,\frac{R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2}6\lambda_6\,\alpha_6 = 3\,R\,\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

2.

Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 10\text{cm}$ και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$. Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του E_ν.

Λύση

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Rightarrow \left(5\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 10^2$$

$$75 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 100$$

$$\frac{\lambda_\nu^2}{4} = 100 - 75$$

$$\frac{\lambda_\nu^2}{4} = 25$$

$$\lambda_\nu^2 = 100 \Rightarrow \lambda_\nu = 10\text{cm}$$

$$\alpha_\nu = 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \alpha_6 \Rightarrow \nu = 6$$

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2}6\lambda_6\,\alpha_6 = 3\,R\,\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 100\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

3.

Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 8\text{cm}$ και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$.. Να βρεθεί το απόστημά του α_ν και το εμβαδόν του E_ν.

Λύση

$$\lambda_\nu = 8\sqrt{2} \Rightarrow \lambda_\nu = R\sqrt{2} = \lambda_4 \Rightarrow \nu = 4$$

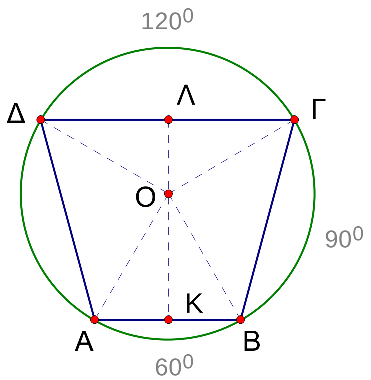
$$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$E_4 = \lambda_4^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 64\cdot 2 = 128\text{cm}^2$$

4.

Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\overset{\frown}{AB} = 60^o$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90^o$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^o$. Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση



$\overset{\frown}{AB} = 60^o \Rightarrow AB = \lambda_6 = R$

$\overset{\frown}{B\Gamma} = 90^o \Rightarrow B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^o \Rightarrow \Gamma\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

$\overset{\frown}{A\Delta} = 360^o - 60^o - 90^o - 120^o = 90^o$

Άρα $A\Delta = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

$\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma} \Rightarrow \Delta\Gamma \parallel AB \Rightarrow$

$AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο.

Φέρουμε το ύψος ΛK του τραπεζίου από το κέντρο O.

$$\Lambda K = O\Lambda + OK = \alpha_3 + \alpha_6 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}\Lambda K =$$

$$\frac{R + R\sqrt{3}}{2}\,\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{R^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}cm^2$. Να βρεθεί η ακτίνα του.

Λύση

$$\varphi_\nu = 180^0 - \frac{360^0}{\nu} \Rightarrow \varphi_\nu = 2 - \frac{4}{\nu} \text{ σε ορθές}$$

$$\nu\varphi_\nu = 8 \Leftrightarrow \nu\left(2 - \frac{4}{\nu}\right) = 8 \Leftrightarrow 2.\nu - 4 = 8 \Leftrightarrow 2.\nu = 12 \Leftrightarrow \nu = 6$$

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 \Leftrightarrow 6\sqrt{3} = \frac{1}{2}6\lambda_6\ \alpha_6$$

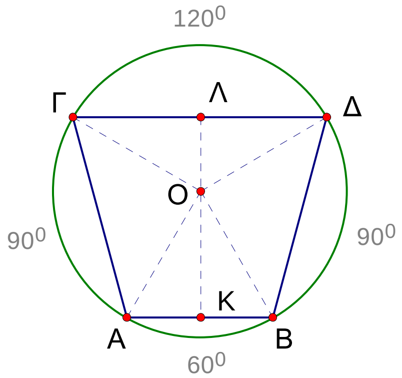
$$6\sqrt{3} = 3\,R\,\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$12 = 3\,R^2 \Leftrightarrow R^2 = 4 \Leftrightarrow R = 2$$

2.

Σε κύκλο (O,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB = R$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τραπεζίου $AB\Delta\Gamma$, το ύψος του και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του R.

Λύση



$AB = R \;\Rightarrow\; AB = \lambda_6 \;\Rightarrow\; \overset{\frown}{AB} = 60^o$

$\Gamma\Delta = R\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \Gamma\Delta = \lambda_3 \;\Rightarrow\; \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^o$

$AB\Delta\Gamma$ εγγεγραμμένο τραπέζιο $\Rightarrow$ ισοσκελές.

$\Gamma A = \Delta B \;\Rightarrow\; \overset{\frown}{\Gamma A} = \overset{\frown}{\Delta B}$

Αλλά $\overset{\frown}{\Gamma A} + \overset{\frown}{\Delta B} = 360^o - 60^o - 120^o = 180^o$

Άρα $\overset{\frown}{\Gamma A} = \overset{\frown}{\Delta B} = 90^o \;\Rightarrow$

$\Gamma A = \Delta B = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

Φέρουμε το ύψος ΛK του τραπεζίου από το κέντρο O.

$$\Lambda K = O\Lambda + OK = \alpha_3 + \alpha_6 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

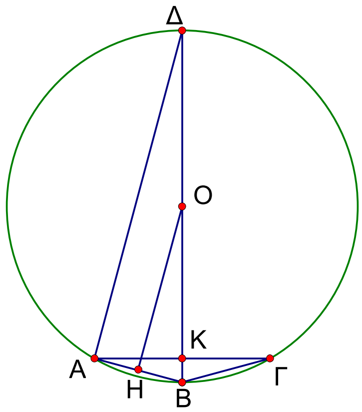
$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB+\Delta\Gamma}{2}\Lambda K =$$

$$\frac{R+R\sqrt{3}}{2}\,\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{R^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

3.

Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O.R).

Λύση



Θεωρούμε $AB = B\Gamma = \lambda_{12}$

οπότε $A\Gamma = \lambda_6 = R$

Φέρουμε τη διάμετρο $BKO\Delta$

οπότε $OK = \alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

άρα $BK = BO - OK = R - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$BK = \dfrac{R\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$

Τρίγωνο $AB\Delta$ ορθογώνιο με ύψος $AK \Rightarrow AB^2 = B\Delta \cdot BK \Rightarrow$

$$AB^2 = 2R\,\frac{R\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} = R^2\left(2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \lambda_{12} = AB = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Είναι $\alpha_{12}^2 + \dfrac{\lambda_{12}^2}{4} = R^2 \Rightarrow \alpha_{12}^2 = R^2 - \dfrac{\lambda_{12}^2}{4} \Rightarrow$

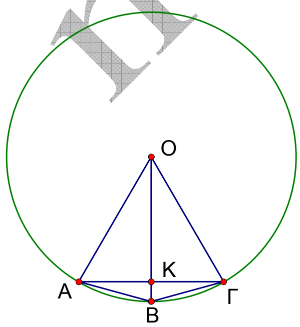
$$\alpha_{12}^2 = R^2 - \frac{R^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4} \Rightarrow$$

$$\alpha_{12} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

4.

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση



Θεωρούμε $AB = B\Gamma = \lambda_{12}$

οπότε $A\Gamma = \lambda_6 = R$

Φέρουμε τις OA, OB, $O\Gamma$,

είναι δε $OB \perp A\Gamma$

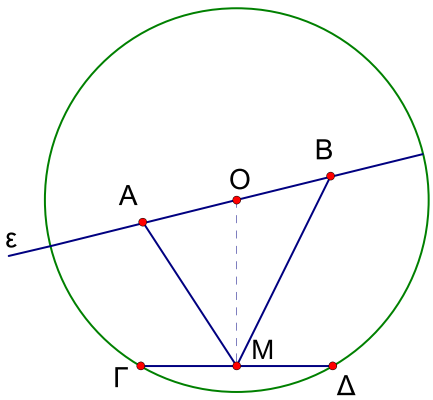
$$E_{12} = 6\left(OAB\Gamma\right) = 6\frac{A\Gamma \cdot OB}{2} = 6\frac{R \cdot R}{2} = 3R^2$$

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του $\Gamma\Delta = \lambda_6$. Πάνω σε τυχαία ευθεία ε, που διέρχεται από το κέντρο και εκατέρωθεν του Ο παίρνουμε σημεία Α, Β, ώστε $OA = OB = \alpha_3$. Αν Μ το μέσο της ΓΔ, να αποδείξετε ότι $MA^2 + MB^2 = \lambda_4^2$.

Λύση



Είναι $OA = OB = \alpha_3 = \dfrac{R}{2}$

και $OM \perp \Gamma\Delta$, άρα $OM = \alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

1^o Θ. Διαμέσων στο τρίγωνο ΜΑΒ:

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$= 2\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{R^2}{2}$$

$$= 2\,\frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{2}$$

$$= \frac{3R^2}{2} + \frac{R^2}{2}$$

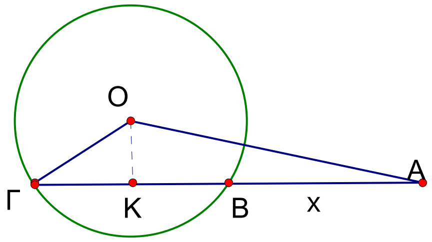
$$= \frac{4R^2}{2}$$

$$= 2\,R^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = \lambda_4^2$$

2.

Από το σημείο Α εκτός κύκλου (Ο,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ, ώστε ΑΒ = ΒΓ. Αν $ΟΑ = R\sqrt{7}$, να αποδείξετε ότι $ΒΓ = λ_3$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ.

Λύση



Έστω ΑΒ = ΒΓ = x

Δύναμη του σημείου Α:

$$ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΟ^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$x \cdot 2x = \left(R\sqrt{7}\right)^2 - R^2$$

$$2x^2 = 7R^2 - R^2$$

$$x^2 = 3R^2 \Rightarrow x = R\sqrt{3} = λ_3$$

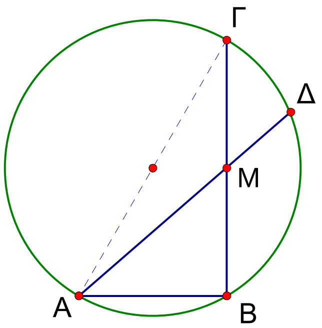
Φέρουμε $ΟΚ \perp ΒΓ$ δηλαδή $ΟΚ = α_3 = \frac{R}{2}$

$$(ΑΟΓ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΟΚ = \frac{1}{2}\, 2R\sqrt{3}\, \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

3.

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, ώστε $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το σημείο που τέμνει η προέκταση της AM τον κύκλο, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το τμήμα $M\Delta$.

Λύση



$AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3 \quad \Rightarrow$

$\overset{\frown}{AB} = 60^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120^o \quad \Rightarrow$

$\overset{\frown}{AB\Gamma} = 180^o$ άρα $A\Gamma$ διάμετρος και $\hat{B} = 1\llcorner$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο BAM:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2 + \frac{3R^2}{4} = \frac{7R^2}{4}$$

Άρα $AM = \dfrac{R\sqrt{7}}{2}$

Δύναμη του σημείου M: $\quad MA \cdot M\Delta = MB \cdot M\Gamma \quad \Rightarrow$

$$\frac{R\sqrt{7}}{2} M\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{2}\,\frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$M\Delta = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\frac{3R}{4} = \frac{2\sqrt{7}}{7}\,\frac{3R}{4} = \frac{3R\sqrt{7}}{14}$$