# 11.6 – 11.8

## Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 250 – 251

## Ερωτήσεις Κατανόησης

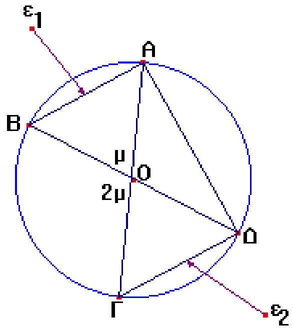
**1.**

Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στην στήλη Β

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R | $2\pi R^2$ |
| Εμβαδόν κυκλικού τομέα $\mu^o$ σε κύκλο ακτίνας R | $\pi R^2 \frac{\mu}{180}$ |
| Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad σε κύκλο ακτίνας R | $\pi R^2$ |
| | $\frac{1}{2}\alpha R^2$ |
| | $\pi R^2 \frac{\mu}{360}$ |

## 2.

Με βάση το παρακάτω σχήμα χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) και αιτιολογήστε την απάντηση σας.




| | | |
|---|---|---|
| **i)** $(O\overset{\frown}{AB}) = (O\overset{\frown}{\Gamma\Delta})$ | Σ. | Λ |
| **ii)** $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = (O\overset{\frown}{\Delta A})$ | Σ. | Λ |
| **iii)** $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = 2(O\overset{\frown}{AB})$ | Σ. | Λ |
| **iv)** $(OA\Delta) = 2(OAB)$ | Σ | Λ |
| **v)** $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ | Σ. | Λ |
| **vi)** $AB = \lambda_6$ | Σ. | Λ |

**Απάντηση**

**i)** Σωστό επειδή οι τομείς έχουν ίσες γωνίες

**ii)** Σωστό επειδή οι τομείς έχουν ίσες γωνίες

**iii)** Σωστό αφού η γωνία του $(O\overset{\frown}{B\Gamma})$ είναι 2μ και του $(O\overset{\frown}{AB})$ είναι μ

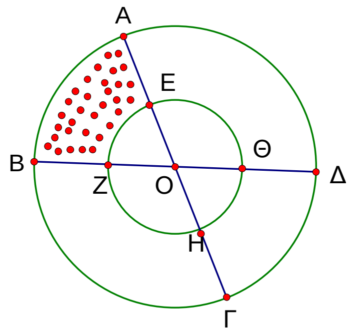
**iv)** Λάθος διότι $(OA\Delta) = (OAB)$ αφού ΑΟ διάμεσος του ΑΔΒ

**v)** Σωστό σαν διαφορές ίσων εμβαδών $(AOB) = (O\Gamma\Delta)$ και $(O\overset{\frown}{AB}) = (O\overset{\frown}{\Gamma\Delta})$

**vi)** Σωστό αφού $\mu + 2\mu = 180^o \Leftrightarrow \mu = 60^o$

**3.**

Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες ΟΕ = R και ΟΑ = 2R . Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντηση σας .




**i)** $\ell_{AB} = \ell_{\Gamma\Delta}$ Σ. Λ

**ii)** $\ell_{AB} = \ell_{EZ}$ Σ Λ

**iii)** $\ell_{AB} = 2\ell_{\Gamma\Delta}$ Σ Λ

**iv)** (ΑΒΖΕ) = (ΓΔΘΗ) Σ. Λ

**Απάντηση**

**i)** Είναι σωστό διότι τα τόξα ΑΒ και ΓΔ βρίσκονται στον ίδιο κύκλο και έχουν ίσες γωνίες

**ii)** Είναι λάθος διότι έχουν ίσες γωνίες αλλά βρίσκονται σε κύκλους με άνισες ακτίνες

**iii)** Είναι λάθος λόγω του (i)

**iv)** Σωστό διότι είναι διαφορές των παρακάτω ίσων εμβαδών

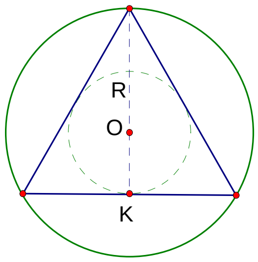
$(O\overset{\frown}{AB}) = (O\overset{\frown}{\Gamma\Delta})$, $(O\overset{\frown}{EZ}) = (O\overset{\frown}{\Theta H})$ .

# Ασκήσεις Εμπέδωσης

## 1.

Δίνεται κύκλος (O,R) και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

**Λύση**




Η ακτίνα OK του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι ίση με το απόστημα $\alpha_3 = \dfrac{R}{2}$

$$L_{(O,OK)} = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4}$$

## 2.

Δίνεται κύκλος (K) και τόξο του $\overset{\frown}{AB} = 60^o$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει μήκος $4\pi$ cm, να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου (K).

**Λύση**

Έστω R η ακτίνα του κύκλου (K)

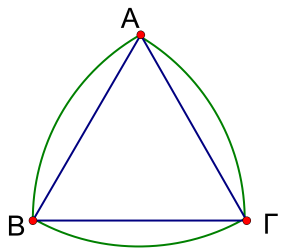
$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = 4\pi \iff \frac{\pi R \cdot 60}{180} = 4\pi \iff \frac{R}{3} = 4 \iff R = 12$$

$$E_{(K)} = \pi R^2 = \pi.12^2 = 144\pi \ \text{cm}^2$$

## 3.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α,α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

**Λύση**




$$\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi\alpha \cdot 60}{180} = \frac{\pi\alpha}{3}$$

Περίμετρος $= 3\cdot \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \pi\alpha$

$$\varepsilon_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = E_{A\overset{\frown}{B\Gamma}} - (AB\Gamma) =$$

$$= \frac{\pi\alpha^2 60}{360} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

Εμβαδόν καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ $= 3\cdot \varepsilon_{\overset{\frown}{B\Gamma}} + (AB\Gamma)$

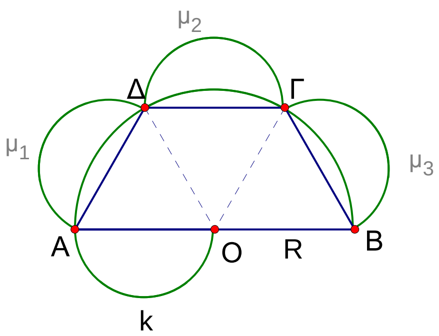
$$= 3\left(\frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{2} - 3\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{2} - 2\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

## 4.




Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ένα ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ και εξωτερικά του τα ίσα ημικύκλια με διαμέτρους ΟΑ, ΑΔ, ΔΓ και ΓΒ.
Αν $(\mu_1)$, $(\mu_2)$, $(\mu_3)$ είναι τα εμβαδά των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων και $(\kappa)$ το εμβαδόν του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι

$(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = (ΑΒΓΔ)$.

**Λύση**

$ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ \Rightarrow \overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΔΓ} = \overset{\frown}{ΓΒ} = 60^0 \Rightarrow$

τα τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΔΓ, ΟΓΒ είναι ίσα ισόπλευρα πλευράς R.

Άρα $E = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$$\varepsilon_{\overset{\frown}{ΑΔ}} = E_{Ο\overset{\frown}{ΑΔ}} - (ΟΑΔ) = \frac{\pi R^2 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$(\mu_1) = \varepsilon_{ημικυκλίου} - \varepsilon_{\overset{\frown}{ΑΔ}} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3\pi R^2 - 4\pi R^2}{24} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{24}$$

$$= (\mu_2) = (\mu_3)$$

$$(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = 3(\mu_1) + (\kappa)$$

$$= 3\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{24}\right) + \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{8} + \frac{\pi R^2}{8} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \qquad \textbf{(1)}$$

$$(ΑΒΓΔ) = 3(ΟΑΔ) = 3\,\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = (\text{ΑΒΓΔ})$.

**5.**

Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.

**Λύση**

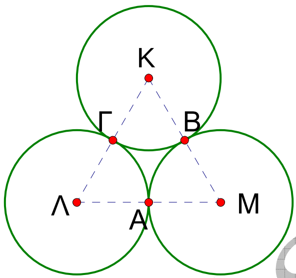
Έστω Κ, Λ, Μ τα κέντρα των κύκλων.

Είναι ΚΛ = ΛΜ = ΜΚ = 2R και $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = \overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = \overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$

$\ell_{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}} = \dfrac{\pi R 60}{180} = \dfrac{\pi R}{3}$ συνεπώς η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι

ίση με $P = 3\dfrac{\pi R}{3} = \pi R$

$(\text{ΚΛΜ}) = \dfrac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$




$\varepsilon_{\text{Κ}\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}} = \dfrac{\pi R^2 60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

Εμβαδόν καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ =

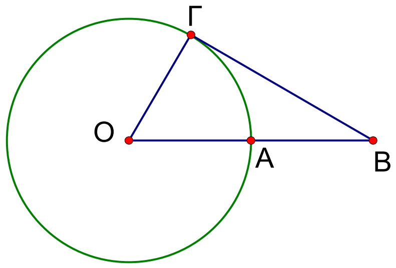
$$(\text{ΚΛΜ}) - 3\,\varepsilon_{\text{Κ}\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}} = R^2\sqrt{3} - 3\,\frac{\pi R^2}{6} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{R^2}{2}\left(2\sqrt{3} - \pi\right)$$

# Αποδεικτικές Ασκήσεις

## 1.

Δίνεται κύκλος (O,R) και ακτίνα του OA. Στην προέκταση της OA προς το A παίρνουμε σημείο B, ώστε OA = AB. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το B προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.

**Λύση**




Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΒ είναι

$O\Gamma = \frac{OB}{2}$, άρα $\hat{B} = 30^0$, άρα $\hat{O} = 60^0$

$\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi R 60}{180} = \frac{\pi R}{3}$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΓΟΒ:

$\Gamma B^2 = OB^2 - O\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2$

$= 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow \Gamma B = R\sqrt{3}$

Περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma = \ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} + \Gamma B + BA$

$= \frac{\pi R}{3} + R\sqrt{3} + R$

$= \frac{R}{3}\left(\pi + 3\sqrt{3} + 3\right)$

Εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma = (\Gamma OB) - E_{O\overset{\frown}{A\Gamma}}$

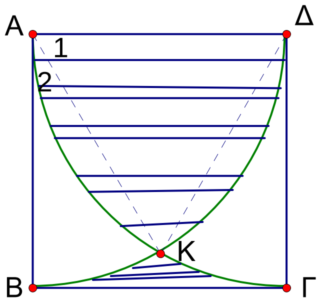
$= \frac{1}{2}\Gamma B \cdot O\Gamma - \frac{\pi R^2 60}{360}$

$= \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot R - \frac{\pi R^2}{6} = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

## 2.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$ των κύκλων (Α, α) και (Δ, α) αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.

**Λύση**




Από το εμβαδόν του τετραγώνου θα αφαιρέσουμε τα δύο ίσα λευκά μικτόγραμμα τρίγωνα.

Για το εμβαδόν μ του μικτόγραμμου τριγώνου $\overset{\frown}{\text{ΑΚΒ}}$, από τον κυκλικό τομέα $\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΚΒ}}$ θα αφαιρέσουμε το κυκλικό τμήμα ΑΚ

Τρίγωνο ΚΑΔ ισόπλευρο $\Rightarrow$ $\hat{\text{Α}}_1 = 60^o$ $\Rightarrow$ $\hat{\text{Α}}_2 = 30^o$

$$\varepsilon_{\overset{\frown}{\text{ΑΚ}}} = \varepsilon_{\text{Δ}\overset{\frown}{\text{ΑΚ}}} - (\text{ΔΑΚ}) = \frac{\pi\alpha^2 60}{360} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\mu = \varepsilon_{\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΒΚ}}} - \varepsilon_{\overset{\frown}{\text{ΑΚ}}} = \frac{\pi\alpha^2 30}{360} - \left(\frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi\alpha^2}{12} - \frac{\pi\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{12}$$

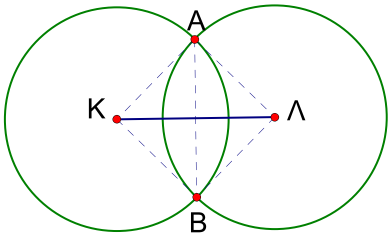
Ζητούμενο εμβαδόν $= (\text{ΑΒΓΔ}) - 2\mu = \alpha^2 - 2\left(\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{12}\right)$

$$= \alpha^2 - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\alpha^2}{6} = \alpha^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

**3.**

Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας $R$ έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

**Λύση**




Είναι

$$KA^2 + \Lambda A^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = K\Lambda^2$$

Άρα $K\hat{A}\Lambda = 1\llcorner$

Άρα ο ρόμβος $KA\Lambda B$ είναι τετράγωνο

Ζητούμενο εμβαδόν = δύο κυκλικά τμήματα $AB$

$$= 2\left(\varepsilon_{K\overset{\frown}{AB}} - (KAB)\right)$$

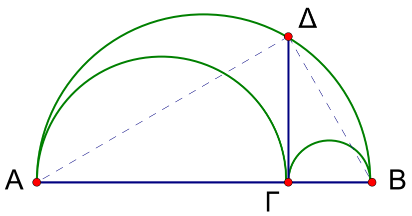
$$= 2\left(\frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{1}{2} R \cdot R\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

**4.**

Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Η κάθετος της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων **( άρβηλος του Αρχιμήδη )** είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

**Λύση**




Εμβ. μεταξύ των τριών ημικυκλίων =
ημικ. διαμέτρου ΑΒ – ημικύκλιο. διαμέτρου ΑΓ – ημικύκλιο διαμέτρου ΓΒ =

$$= \frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{\Gamma B}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\pi AB^2}{8} - \frac{\pi A\Gamma^2}{8} - \frac{\pi \Gamma B^2}{8}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - A\Gamma^2 - \Gamma B^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left((A\Gamma + \Gamma B)^2 - A\Gamma^2 - \Gamma B^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(A\Gamma^2 + 2A\Gamma\cdot\Gamma B + \Gamma B^2 - A\Gamma^2 - \Gamma B^2\right) \Rightarrow$$

Εμβαδόν μεταξύ των τριών ημικυκλίων $= \frac{\pi}{4}A\Gamma\cdot\Gamma B$ **(1)**

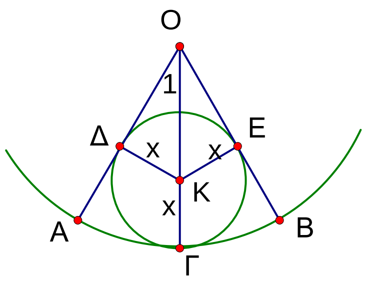
Εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ $= \pi\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2 = \pi\frac{\Gamma\Delta^2}{4} = \frac{\pi}{4}\Gamma\Delta^2$ **(2)**

Από τις (1), (2), αρκεί να ισχύει $\Gamma\Delta^2 = A\Gamma\cdot\Gamma B$, το οποίο συμβαίνει, αφού το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ορθογώνιο με ύψος ΔΓ.

**5.**

Δίνεται κύκλος $(O,R)$ και τόξο του $\overset{\frown}{AB} = 60^o$. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα $O\overset{\frown}{AB}$.

**Λύση**




Έστω $(K,x)$ ο εγγεγραμμένος κύκλος στον κυκλικό τομέα και Γ, Δ, Ε τα σημεία επαφής.

$K\Delta = KE \;\Rightarrow\; OK\Gamma$ διχοτόμος της $\hat{O}$.

Άρα $\hat{O}_1 = 30^o \;\Rightarrow\; x = \dfrac{OK}{2} \;\Rightarrow\; OK = 2x$

Είναι $OK + K\Gamma = R \;\Rightarrow\; 2x + x = R \;\Rightarrow$

$3x = R \;\Rightarrow\; x = \dfrac{R}{3}$

$$E = \pi x^2 = \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{9}$$

# Σύνθετα Θέματα

## 1.

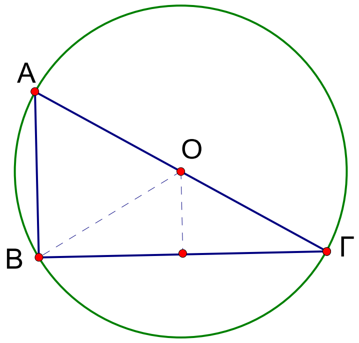
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Να υπολογισθούν:

**i)** το μήκος της πλευράς ΑΓ,

**ii)** ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κύκλου (Ο,R),

**iii)** το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων, που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και περιέχονται στις αντίστοιχες κυρτές γωνίες.

**Λύση**




**i)**

$AB = \lambda_6 = R \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^o$

$B\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = 120^o$

Άρα $\overset{\frown}{AB\Gamma} = 180^o \Rightarrow A\Gamma$ διάμετρος $\Rightarrow$ $A\Gamma = 2R$

**ii)**

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma . AB = \frac{1}{2} R\sqrt{3}\, R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{\text{κύκλου}} = \pi R^2$$

Άρα $\dfrac{(AB\Gamma)}{E_{\text{κύκλου}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$

**iii)**

$$\varepsilon_{\overset{\frown}{AB}} = \varepsilon_{O\overset{\frown}{AB}} - (OAB) = \frac{\pi R^2 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

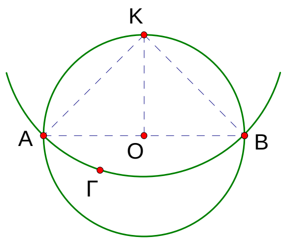
$$\varepsilon_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \varepsilon_{O\overset{\frown}{B\Gamma}} - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 120}{360} - \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} R\sqrt{3}\,\frac{R}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\varepsilon_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{1}{2} E_{\text{κύκλου}} = \frac{1}{2}\pi R^2$$

## 2.

Δίνεται κύκλος (O,R). Με κέντρο τυχαίο σημείο του και ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε αυτόν, γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

**Λύση**




Με κέντρο K και ακτίνα $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο, που τέμνει τον (O,R) στα σημεία A και B.

$KA = KB = R\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \widehat{KA} = \widehat{KB}\ 90^o \;\Rightarrow$ AOB διάμετρος και $A\hat{K}B = 90^o$.

Ζητούμενο $E$ = (τεταρτοκύκλιο $K\widehat{A\Gamma B}$) + (2·κυκλικό τμήμα KB)

$$= \frac{\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} + 2\,(\text{κυκλικός τομέας } O\widehat{KB} - \text{τρ. } OKB)$$

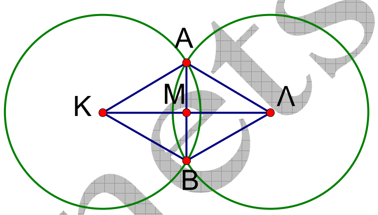
$$= \frac{\pi 2R^2}{4} + 2\left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R\cdot R\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = \pi R^2 - R^2$$

## 3.

Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{3}$. Να βρείτε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κοινού μέρους.

**Λύση**




Έστω (K, R) και (Λ, R) οι δύο κύκλοι με $K\Lambda = R\sqrt{3}$ και κοινή χορδή AB

AKBΛ ρόμβος πλευράς R $\Rightarrow$

KΛ, AB διχοτομούνται κάθετα σε σημείο M.

Άρα $KM = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \alpha_6 \;\Rightarrow$

$AB = \lambda_6 = R$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, επομένως $A\hat{K}B = 60^o$.

Ζητούμενο $E$ = (2. κυκλικό τμήμα AB)

$$= 2\,(\text{κυκλικός τομέας } K\widehat{AB} - \text{τρ.} KAB)$$

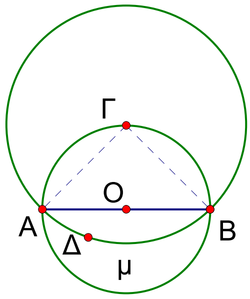
$$= 2\left(\frac{\pi R^2 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= 2R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

## 4.

Δίνεται κύκλος (O,R) και μια διάμετρός του AB. Με κέντρο το μέσο Γ του ενός ημικυκλίου και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος ορίζει με το άλλο ημικύκλιο τον μηνίσκο, έστω μ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μ ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

**Λύση**




Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΑΒ:

$$(\Gamma A)^2 + (\Gamma B)^2 = (2R)^2 \Rightarrow$$

$$2(\Gamma A)^2 = 4R^2 \Rightarrow$$

$$(\Gamma A)^2 = 2R^2 \quad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

(μ) = (ΑΒΓ) ⇔

(μ) + (κυκλ.τμήμα ΑΔΒ) = (ΑΒΓ) + (κυκλ.τμήμα ΑΔΒ) ⇔

(ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ) = (κυκλικού τομέα $\Gamma\overset{\frown}{A\Delta B}$) ⇔

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(\Gamma A)^2 90}{360} \Leftrightarrow$$

$$\frac{R^2}{2} = \frac{(\Gamma A)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$(\Gamma A)^2 = 2R^2$ που ισχύει από την (1)