

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

Μονάδες 4

**A2.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

**B1.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .

**β.** Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**γ.** Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Μονάδες 4,5

**B2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο  $x_0$ .

| Στήλη A<br>συναρτήσεις                        | Στήλη B<br>εφαπτόμενες |
|---|------------------------|
| α. $f(x)=3x^3, \quad x_0=1$                   | 1. $y=-2x+\pi$         |
| β. $f(x)=\eta\mu 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$ | 2. $y=\frac{1}{4}x+1$  |
| γ. $f(x)=3 x , \quad x_0=0$                   | 3. $y=9x-6$            |
| δ. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4$               | 4. $y=-9x+5$           |
|   | 5. δεν υπάρχει         |

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(z)=\frac{2z+i}{z-2i}, z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq -2i$ ,

όπου  $\bar{z}$  ο συζυγής του  $z$ .

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1=f(9-5i)$$

Μονάδες 6

$$w_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$$

Μονάδες 6

**β.** Θεωρούμε τον πίνακα  $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$   
όπου  $|w_1|$  το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $w_1$   
του ερωτήματος **α**.

*Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.*

Ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T$  με πίνακα  $M$  είναι:

A. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$   
και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{4}$

B. συμμετρία ως προς τον άξονα  $x'$

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα  $y'$

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία  $y=x$

E. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων

Ο και λόγο  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Μονάδες 5

**γ.** Αν  $M$  ο πίνακας του ερωτήματος **β**, τότε να βρεθεί ο πίνακας  $X$  ώστε να ισχύει:

$$MX=K$$

όπου  $K$  είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[0,1]$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$ . Αν  $f(0)=2$  και  $f(1)=4$ , να δείξετε ότι:

α. η ευθεία  $y=3$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .  
Μονάδες 7

β. υπάρχει  $x_1 \in (0,1)$ , τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει  $x_2 \in (0,1)$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(x_2, f(x_2))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=2x+2000$ .

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή  $t=0$  χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$$

όπου  $a$  και  $\beta$  είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος  $t$  μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και

επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

**α.** Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ .  
Μονάδες 15

**β.** Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10