

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 12 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$
και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 10

β) Έστω μία συνάρτηση f και το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

Μονάδες 2

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} .$$

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

Μονάδες 2

5. Αν για μία συνάρτηση f , συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$(5z-1)^5 = (z-5)^5 .$$

α) Να δείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι: $|z|=1$.

Μονάδες 10

γ) Αν $w = 5z+1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f, για την οποία ισχύει

$$f(x) = 3 + 2 \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 3e^{2x}$.

Μονάδες 5

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$ με $\lambda > 0$.

Μονάδες 10

δ) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ