

## 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1<sup>ο</sup> ΒΑΘΜΟΥ

### ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

#### 1.

Για να λύσουμε ανίσωση 1<sup>ο</sup> βαθμού

- α) απαλοιφή παρανομαστών
- β) πράξεις
- γ) χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
- δ) αναγωγή ομοίων όρων
- ε) κοινός παράγοντας ο άγνωστος

Έτσι φθάνουμε σε μία από τις μορφές  $ax > \beta$ ,  $ax < \beta$ ,  $ax \geq \beta$ ,  $ax \leq \beta$

#### 2.

Λύνοντας ως προς  $x$  τις  $ax > \beta$ ,  $ax < \beta$ ,  $ax \geq \beta$ ,  $ax \leq \beta$

- Όταν  $a > 0$ , η φορά της ανίσωσης παραμένει
- Όταν  $a < 0$ , η φορά της ανίσωσης αντιστρέφεται
- Όταν  $a = 0$ , θέτουμε στην ανίσωση όπου  $a$  το 0

#### 3.

Στην απαλοιφή παρανομαστών

Πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο του ΕΚΠ, διαφορετικά διακρίνουμε περιπτώσεις.

- α) ΕΚΠ  $> 0$
- β) ΕΚΠ  $< 0$
- γ) ΕΚΠ  $= 0$

#### 4.

Διαίρεση – πολλαπλασιασμός με αρνητικό αριθμό.

Αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

#### 5.

Για τις ανισώσεις με απόλυτα

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x - x_0 < \rho$$

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x - x_0 < -\rho \text{ ή } x - x_0 > \rho$$

6.

Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού σε 1<sup>ου</sup>

$$x^2 < \rho^2 \Leftrightarrow |x| < |\rho|$$

$$x^2 > \rho^2 \Leftrightarrow |x| > |\rho|$$

7.

Από ανισότητα σε ισότητα

$$|\alpha| \leq 0 \Rightarrow |\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$|\alpha| + |\beta| \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x-1}{2} < 3 - \frac{2x+1}{4}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} < 3 - \frac{2x+1}{4} &\Leftrightarrow 2(x-1) < 12 - (2x+1) \\ 2x-2 < 12-2x-1 & \\ 4x < 13 & \\ x < \frac{13}{4} & \end{aligned}$$

2.

Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x-1}{2} < 3 + \frac{3x+1}{4}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} < 3 + \frac{3x+1}{4} &\Leftrightarrow 2(x-1) < 12 + 3x + 1 \\ 2x-2 < 13+3x & \\ -x < 15 & \\ x > -15 & \end{aligned}$$

**3.**

Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x-1}{2} < 3 + \frac{2x+1}{-4}$

**Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} < 3 + \frac{2x+1}{-4} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} < 3 - \frac{2x+1}{4} \\ 2(x-1) < 12 - (2x+1) & \\ 2x - 2 < 12 - 2x - 1 & \\ 4x < 13 & \\ x < \frac{13}{4} & \end{aligned}$$

**4.**

Να λύσετε τις ανισώσεις:    **i)**  $\frac{4}{x-2} \geq 1$                       **ii)**  $\frac{4}{x-2} < 1$

**Προτεινόμενη λύση****i)**

Περιορισμός:  $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

- Όταν  $x - 2 < 0$ , δηλαδή όταν  $x < 2$     **(1)**  
 Η ανίσωση γίνεται  $4 \leq x - 2 \Leftrightarrow x \geq 6$     **(2)**  
 Συναλήθευση των (1), (2): αδύνατη
- Όταν  $x - 2 > 0$ , δηλαδή όταν  $x > 2$     **(3)**  
 Η ανίσωση γίνεται  $4 \geq x - 2 \Leftrightarrow x \leq 6$     **(4)**  
 Συναλήθευση των (3), (4):  $2 < x \leq 6$

**ii)**

Ακολουθήσε το i

**5.**

Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)**  $x^2 < 9$                       **ii)**  $(x-2)^2 \leq 1$

**Προτεινόμενη λύση****i)**

$$x^2 < 9 \Leftrightarrow x^2 < 3^2 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

**ii)**

$$\begin{aligned} (x-2)^2 \leq 1 &\Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 1^2 \\ &|x-2| \leq 1 \\ &-1 \leq x-2 \leq 1 \\ &-1+2 \leq x \leq 1+2 \\ &1 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

**6.**

Να λύσετε την ανίσωση  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1$

**Προτεινόμενη λύση**

Περιορισμός:  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1 \\ &|x+1| < |x-1| \\ &(x+1)^2 < (x-1)^2 \\ &x^2 + 2x + 1 < x^2 - 2x + 1 \\ &4x < 0 \\ &x < 0 \end{aligned}$$

**7.**

Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)**  $x^2 > 9$                       **ii)**  $(x-2)^2 > 1$

**Προτεινόμενη λύση****i)**

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 > 3^2 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x < -3 \quad \text{ή} \quad x > 3$$

**ii)**

$$\begin{aligned} (x-2)^2 > 1 &\Leftrightarrow (x-2)^2 > 1^2 \\ &|x-2| > 1 \\ &x-2 < -1 \quad \text{ή} \quad x-2 > 1 \\ &x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3 \end{aligned}$$

**8.**

Να λύσετε την ανίσωση  $\left| \frac{3x+1}{x+3} \right| \geq 1$

**Προτεινόμενη λύση**

Περιορισμός:  $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$$\left| \frac{3x+1}{x+3} \right| \geq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{3x+1}{x+3} \right| \geq 1$$

$$|3x+1| \geq |x+3|$$

$$(3x+1)^2 \geq (x+3)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 \geq x^2 + 6x + 9$$

$$8x^2 \geq 8$$

$$x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1$$

Και λόγω του περιορισμού :  $x \leq -1$  με  $x \neq -3$  ή  $x \geq 1$

**9.**

Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)**  $\frac{1}{(x-3)^2} \geq \frac{1}{5}$  **ii)**  $\frac{1}{(x-3)^2} \leq \frac{1}{5}$

**Προτεινόμενη λύση****i)**

Περιορισμός:  $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

$$\frac{1}{(x-3)^2} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 \geq (x-3)^2$$

$$(x-3)^2 \leq (\sqrt{5})^2$$

$$|x-3| \leq \sqrt{5}$$

$$-\sqrt{5} \leq x-3 \leq \sqrt{5}$$

$$3-\sqrt{5} \leq x \leq 3+\sqrt{5}, x \neq 3$$

**ii)**

Περιορισμός:  $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

$$\frac{1}{(x-3)^2} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 \leq (x-3)^2$$

$$(x-3)^2 \geq (\sqrt{5})^2$$

$$|x-3| \geq \sqrt{5}$$

$$x-3 \leq -\sqrt{5} \text{ ή } x-3 \geq \sqrt{5}$$

$$x \leq 3-\sqrt{5} \text{ ή } x \geq 3+\sqrt{5}$$

**10.**

Να λύσετε τις ανισώσεις:    **i)**  $|x-1| \leq 0$                       **ii)**  $(2x+3)^2 \leq 0$

**Προτεινόμενη λύση****i)**

$$|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow |x-1|=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

**ii)**

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 \leq 0 &\Leftrightarrow 2x+3=0 \\ &\Leftrightarrow 2x=-3 \\ &x=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

**11.**

Αν  $|2x-1| + |y-3| \leq 0$  να βρείτε τους  $x, y$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned} |2x-1| + |y-3| \leq 0 &\Leftrightarrow |2x-1|=0 \text{ και } |y-3|=0 \\ &2x-1=0 \text{ και } y-3=0 \\ &2x=1 \text{ και } y=3 \\ &x=\frac{1}{2} \text{ και } y=3 \end{aligned}$$

**12.**

Αν  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \leq 0$  να βρείτε τους  $x, y$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \leq 0 &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \leq 0 \\ &(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 0 \\ &(x+1)^2 = 0 \text{ και } (y-2)^2 = 0 \\ &x+1=0 \text{ και } y-2=0 \\ &x=-1 \text{ και } y=2 \end{aligned}$$

**13.**

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda$ , να λύσετε την ανίσωση  $\lambda x - \lambda^2 > x - 1$

**Προτεινόμενη λύση**

$$\lambda x - \lambda^2 > x - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x > \lambda^2 - 1$$

$$(\lambda - 1)x > (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad \mathbf{(1)}$$

- Όταν  $\lambda - 1 = 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda = 1$ , η (1)  $\Leftrightarrow 0x > 0$  αδύνατη
- Όταν  $\lambda - 1 > 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda > 1$ , η (1)  $\Leftrightarrow x > \lambda + 1$
- Όταν  $\lambda - 1 < 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda < 1$ , η (1)  $\Leftrightarrow x < \lambda + 1$

**14.**

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda$ , να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{\lambda - 3}{4} x - 1 < \frac{x}{2} + \lambda$$

**Προτεινόμενη λύση**

$$\frac{\lambda - 3}{4} x - 1 < \frac{x}{2} + \lambda \Leftrightarrow (\lambda - 3)x - 4 < 2x + 4\lambda$$

$$(\lambda - 3)x - 2x < 4\lambda + 4$$

$$(\lambda - 3 - 2)x < 4\lambda + 4$$

$$(\lambda - 5)x < 4\lambda + 4 \quad \mathbf{(1)}$$

- Όταν  $\lambda - 5 = 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda = 5$ , η (1)  $\Leftrightarrow 0x < 24$   
 $0 < 24$  αόριστη
- Όταν  $\lambda - 5 > 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda > 5$ , η (1)  $\Leftrightarrow x < \frac{4\lambda + 4}{\lambda - 5}$
- Όταν  $\lambda - 5 < 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda < 5$ , η (1)  $\Leftrightarrow x > \frac{4\lambda + 4}{\lambda - 5}$