ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

Α.2. α Σ , β. Λ , γ. Λ , δ. Σ, ε . Σ

Β.1. 1→ζ , 2→γ , 3→α, 4→δ, 5→β

Β.2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z} = \frac{1}{z}$

(είναι $z \neq 0$ δεδομένου ότι $|z| = 1$)

ΘΕΜΑ 2ο

α.

Αφού η f είναι συνεχής , θα είναι συνεχής και στο $x_o = 3$.

Αρα $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$ **(1)**

Όμως $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \alpha x^2 = 9\alpha$,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1-e^{x-3}}{x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\left(1-e^{x-3}\right)'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} = -1$$

$f(3) = 9\alpha$ άρα πρέπει

(1) $\Leftrightarrow 9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$

β.

Για $x > 3$ είναι $f(x) = \frac{1-e^{x-3}}{x-3}$, οπότε $f(4) = 1-e$

$$\text{και} \quad f'(x) = \left(\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{\left(1-e^{x-3}\right)'(x-3)-(x-3)'\left(1-e^{x-3}\right)}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-e^{x-3}(x-3)-\left(1-e^{x-3}\right)}{(x-3)^2} \quad \text{οπότε } f'(4) = -1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(4 , f(4))$ είναι η

$y - f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y-(1-e) = -(x-4) \Leftrightarrow y = -x+5-e$

γ.

Για $\alpha = -\frac{1}{9}$ και για $x \leq 3$ έχουμε $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το [1, 2] στο οποίο η f είναι συνεχής με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 -f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \left[\frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{27} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

* Όπως έχει η εκφώνηση θα έπρεπε να υπολογίσουμε το εμβαδόν συναρτήσει του α

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Έστω ότι η f έχει σε κάποιο x_o ακρότατο. Τότε, αφού το x_o είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$.

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης έχουμε

$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x) f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$ **(1)**

Η (1) για $x = x_o \Rightarrow 3f^2(x_o)f'(x_o) + 2\beta f(x_o) f'(x_o) + \gamma f'(x_o) = 3x_o^2 - 4x_o + 6$

Και επειδή $f'(x_o) = 0$, έχουμε $3x_o^2 - 4x_o + 6 = 0$ πράγμα αδύνατο αφού η διακρίνουσα της εξίσωσης αυτής είναι $\Delta = -56 < 0$

β.

Η (1) γίνεται $f'(x)\left(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma\right) = 3x^2 - 4x + 6$ **(2)**

Το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 6$ είναι θετικό δεδομένου ότι η διακρίνουσα του Δ είναι $\Delta = -56 < 0$, οπότε και το πρώτο μέλος της (2) θα είναι θετικό.

Η ποσότητα $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα $\Delta_1 = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ από την υπόθεση, άρα

$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε από τη (2) συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

γ.

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow$

$f(x)\left[f^2(x) + \beta f(x) + \gamma\right] = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ **(3)**

Πάμε για Bolzano

Για $x = 0$ η (3) $\Rightarrow f(0)\left[f^2(0) + \beta f(0) + \gamma\right] = -1$ **(4)**

Το $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma$ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta_2 = \beta^2 - 4\gamma$

Αλλά $\beta^2 < 3\gamma \Rightarrow \gamma > 0$ **(5)**

Οπότε $\beta^2 < 3\gamma \Rightarrow \beta^2 - 4\gamma < 3\gamma - 4\gamma \Rightarrow \beta^2 - 4\gamma < -\gamma \overset{(5)}{<} 0$

Επομένως ………………………………. $\Delta_2 < 0$

Άρα το τριώνυμο $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma$ είναι ομόσημο του συντελεστή 1 του $f^2(0)$ δηλαδή θετικό. Οπότε η (4) $\Rightarrow f(0) < 0$ **(6)**

Επίσης για $x = 1$, η (3) $\Rightarrow f(1)\left[f^2(1) + \beta f(1) + \gamma\right] = 4 > 0$

Οπότε, όπως και προηγουμένως βρίσκουμε ότι $f(1) > 0$ **(7)**

$(6) \cdot (7) \Rightarrow f(0) f(1) < 0$, και επειδή f συνεχής στο [0, 1], κατά το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1).

Αυτή η ρίζα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$$f(x) = 1 - 2x^2\int_0^1 t\, f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 x^2 t\, f^2(xt)dt$$
$$= 1 - 2\int_0^1 x\cdot t\cdot f^2(xt)\cdot xdt$$

Θέτω $x \cdot t = u$, οπότε $du = xdt$ και για $t = 0$ έχω $u = 0$
για $t = 1$ έχω $u = x$

Οπότε $f(x) = 1 - 2\int_0^x uf^2(u)du$ **(1)**

Επειδή οι συναρτήσεις f και u είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $uf^2(u)$ είναι επίσης συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών.

Άρα η συνάρτηση $\int_0^x uf^2(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,οπότε παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και η συνάρτηση $1 - 2\int_0^x uf^2(u)du$ δηλαδή η f.

$$(1) \Rightarrow f'(x) = \left(1 - 2\int_0^x uf^2(u)du\right)' = -2xf^2(x) \quad \textbf{(2)}$$

β.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (πράξεις παραγωγίσιμων)

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2 \Rightarrow g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \overset{\text{λόγω της (2)}}{=} 2x - 2x = 0$$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $g(x) = c$

γ.

$$g(x) = c \Rightarrow \frac{1}{f(x)} - x^2 = c \quad \textbf{(3)}$$

Η (1) για $x = 0$ δίνει $f(0) = 1 - 2\int_0^0 uf^2(u)du = 1 - 2\cdot 0 = 1$

Η (3) για $x = 0$ δίνει $\frac{1}{f(0)} = c$, δηλαδή $\frac{1}{1} = c \Leftrightarrow c = 1$

Η (3) γίνεται $\frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

δ.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\eta\mu 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)$$

Είναι $\left|\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| |\eta\mu 2x| \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right|\cdot 1 = \left|\frac{x}{x^2+1}\right|$

δηλαδή $\left|\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right| \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right|$ και από ιδιότητες απολύτων τιμών

$$-\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right|$$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\right)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=0$

Οπότε, με το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)=0$