ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδες 334-335

Β.1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδες 224-225

Β.2. α Λ , β. Λ , γ. Σ , δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$\begin{aligned} f(3) + f(8) + f(13) + f(18) &= i^3z + i^8z + i^{13}z + i^{18}z \\ &= i^3z + (i^2)^4 z + i\,(i^2)^6 z + (i^2)^9 z \\ &= -iz + (-1)^4 z + i\,(-1)^6 z + (-1)^9 z \\ &= -iz + z + iz - z = 0 \end{aligned}$$

β.

$$f(13) = i^{13}z = iz = \left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right)\rho\left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \rho\left(\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$

γ.

Αν $\overrightarrow{OA}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του z και $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $f(13) = iz$, γνωρίζουμε ότι η $\overrightarrow{OB}$ προκύπτει από στροφή της $\overrightarrow{OA}$ κατά γωνία 90^o.

Άρα το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο και επομένως το εμβαδόν του είναι

$$E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}|z|\,|iz| = \frac{1}{2}|z||i||z| = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = 2 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Έστω $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$.

Τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) = (fog)(x_2)$

Επειδή όμως η fog είναι '1—1' θα έχουμε $x_1 = x_2$, άρα η g είναι '1—1'

β.

$g\big(f(x)+x^3-x\big)=g\big(f(x)+2x-1\big) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1$

$x^3-3x+1=0$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=x^3-3x+1$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$h'(x)=3x^2-3$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

Πρόσημο της h' και μονοτονία της h

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		+	0	−	0	+	
h		↗	|	↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η h: Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-1$ το $h(-1)=3$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=1$ το $h(1)=-1$

Ακόμα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

- Όταν $x\in(-\infty, -1]$
  το σύνολο τιμών της h είναι το διάστημα $\big(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\ h(-1)\big]=(-\infty, 3]$
  στο οποίο περιέχεται το 0, άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, -1]$
  προφανώς αρνητική και μοναδική επειδή η h είναι γν.αύξουσα στο $(-\infty, -1]$
- Όταν $x\in[-1, 1]$
  το σύνολο τιμών της h είναι το διάστημα $\big[h(1), h(-1)\big]=[-1, 3]$
  στο οποίο περιέχεται το 0, άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 1]$,
  η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
  Επειδή όμως $h(0)=1$ και $h(1)=-1$ είναι φανερό ότι η λύση βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$ δηλαδή είναι θετική.
- Όταν $x\in[1, +\infty)$
  το σύνολο τιμών της h είναι το διάστημα $\big[h(1), \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\big)=[-1, +\infty)$
  στο οποίο περιέχεται το 0, άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1, +\infty)$

προφανώς θετική και μοναδική επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Συνεπώς η εξίσωση έχει ακριβώς μία αρνητική και δύο θετικές ρίζες

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = h(x) - g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$

Από τις υποθέσεις, είναι f συνεχής και $f(x) > 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$$

$$\int_\alpha^\beta \left(h(x) - g(x)\right)dx$$

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0$$

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

β.i)

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad \Rightarrow \quad \left(f(x) - e^{-f(x)}\right)' = (x-1)'$$

$$f'(x) + f'(x)\, e^{-f(x)} = 1$$

$$f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}}$$

β.ii)

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ ως παραγωγίσιμη

και παραγωγίσισμη στο $(0, x)$ από υπόθεση.

Οπότε κατά το θεώρημα της μέσης τιμής θα υπάρχει $\xi \in (0, x)$ έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι $$f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-f(x)}}\right)' = \frac{-\left(1+e^{-f(x)}\right)'}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2} = \frac{-e^{-f(x)}(-f(x))'}{1+e^{-f(x)}} = \frac{f'(x)\,e^{-f(x)}}{1+e^{-f(x)}} > 0$$

$$\left(\text{αφού } e^{-f(x)} > 0,\quad 1 + e^{-f(x)} > 0 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} > 0\right)$$

Συνεπώς η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$0 < \xi < x \quad \Leftrightarrow \quad f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \quad \overset{\text{λόγω της (1)}}{\Leftrightarrow} \quad f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά από (β.i) είναι $f'(0) = \dfrac{1}{1 + e^{-f(0)}} = \dfrac{1}{1 + e^{0}} = \dfrac{1}{2}$

Η (2) γίνεται $\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \quad \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad \dfrac{x}{2} < f(x) < x\, f'(x) \qquad \textbf{(3)}$

β.iii)

Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι για $x > 0$ είναι $f(x) > \dfrac{x}{2} > 0$

και επειδή $f(0) = 0$, θα είναι $f(x) \geq 0$ στο $[0,\ 1]$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E = \int_0^1 f(x)dx$

Με βάση το (α) ερώτημα, η ανίσωση (3) $\Rightarrow$ $\int_0^1 \dfrac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 < E < \int_0^1 xf'(x)dx$$

$$\frac{1}{4} < E < \int_0^1 xf'(x)dx \qquad \textbf{(4)}$$

Η δεξιά ανισότητα γράφεται

$$E < \int_0^1 xf'(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad E < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$$

$$E < f(1) - E$$

$$E < \frac{1}{2}f(1)$$

Η (4) γίνεται $\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2}f(1)$