ΛΥΣΕΙΣ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

γ. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Β1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 150

Β2. **α.** Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 148

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

ΘΕΜΑ 2ο

α.

Πρέπει να ισχύει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$

β.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{2x}{x+1} = \frac{2\cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

γ.

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

δ.

Αν $(x_o\,,\,f(x_o))$ είναι το σημείο επαφής, θα πρέπει να ισχύει

$$f'(x_o) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x_o+1)^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(x_o+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_o + 1 = 1 \quad ή \quad x_o + 1 = -1$$

$$x_o = 0 \quad ή \quad x_o = -2$$

- Όταν $x_o = 0$, τότε $f(x_o) = f(0) = 0$ και $f'(x_o) = f'(0) = 2$

  Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y = 2x$
- Όταν $x_o = -2$ τότε $f(x_o) = f(-2) = 4$ και $f'(x_o) = f'(-2) = 2$

  Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow$

  $y - 4 = 2(x+2)$

  $y = 2x + 8$

ΘΕΜΑ 3ο

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9

α.

Τοποθετούμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά 8, 9, 10 , 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

Οπότε $\overline{x} = \dfrac{8+9+10+2\cdot 13+2\cdot 14+15+16+18}{10} = \dfrac{130}{10} = 13$ ευρώ

Η διάμεσος δ είναι $\delta = \dfrac{5^{\eta}\,\pi\alpha\rho + 6^{\eta}\,\pi\alpha\rho}{2} = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5$ ευρώ

Έχουμε δύο επικρατούσες τιμές, τις $M_1 = 13$ ευρώ και $M_2 = 14$ ευρώ

β.

Το εύρος R είναι ίσο με $R = 18 - 8 = 10$ ευρώ

Η διακύμανση s^2 δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_{10}-\overline{x})^2}{10} =$$

$$= \frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + 2\cdot(13-13)^2 + \ldots + (16-13)^2 + (18-13)^2}{10} =$$

$= \dfrac{90}{10} = 9$, οπότε η τυπική απόκλιση είναι ίση με $s_x = \sqrt{9} = 3$ ευρώ

Και ο συντελεστής μεταβολής cv είναι ίσος με $cv_x = \dfrac{s_x}{\overline{x}} = \dfrac{3}{13} \approx 0{,}23 = 23\%$

γ.

Αν y_i είναι μία τιμή μετά την έκπτωση και x_i η αντίστοιχή της πριν την έκπτωση,

τότε $y_i = x_i - \dfrac{10}{100} x_i = 0{,}9x_i$.

Οπότε από γνωστή εφαρμογή, η νέα μέση τιμή θα είναι $\overline{y} = 0{,}9\,\overline{x}$

και η νέα τυπική απόκλιση $s_y = 0{,}9\, s_x$

Επομένως ο νέος cv θα είναι $cv_y = \dfrac{s_y}{\overline{y}} = \dfrac{0{,}9s_x}{0{,}9\overline{x}} = \dfrac{s_x}{\overline{x}} = cv_x$.

Άρα δεν μεταβάλλεται ο cv .

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \neq P(A\cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(A\cup B) \neq P(A\cap B)$$

β.

$$f\,'(x) = 3\big(x - P(A\cup B)\big)^2 - 3\big((x - P(A\cap B)\big)^2$$

$$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\big(x - P(A\cup B)\big)^2 - 3\big((x - P(A\cap B)\big)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Big[\big(x - P(A\cup B)\big) - \big(x - P(A\cap B)\big)\Big]\Big[\big(x - P(A\cup B)\big) + \big(x - P(A\cap B)\big)\Big] = 0$$

$$\big[x - P(A\cup B) - x + P(A\cap B)\big]\big[x - P(A\cup B) + x - P(A\cap B)\big] = 0$$

$$\left[P(A\cap B)\ - P(A\cup B)\right]\left[2x - P(A\cup B)\ - P(A\cap B)\right] = 0 \quad \mathbf{(1)}$$

Από το (α) είναι $P(A\cup B) \neq P(A\cap B) \;\Leftrightarrow\; P(A\cap B) - P(A\cup B) \neq 0$

Η (1) $\Leftrightarrow \quad 2x - P(A\cup B)\ - P(A\cap B) = 0$

$$x = \frac{P(A\cup B) + P(A\cap B)}{2}$$

$$x = \frac{P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(A\cap B)}{2} = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Ομοίως, $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; \left[P(A\cap B)\ - P(A\cup B)\right]\left[2x - P(A\cup B)\ - P(A\cap B)\right] < 0 \quad \mathbf{(2)}$

Αλλά $(A\cap B) \subseteq (A\cup B) \;\Rightarrow\; P(A\cap B) \leq P(A\cup B)$

και επειδή $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$, τελικά θα είναι $P(A\cap B) < P(A\cup B) \;\Leftrightarrow$

$$P(A\cap B) - P(A\cup B) < 0$$

Η (2) $\Leftrightarrow \quad 2x - P(A\cup B)\ - P(A\cap B) > 0 \;\Leftrightarrow$

$$x > \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Ομοίως $\quad f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x < \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$

Άρα στο $x_o = \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο

γ.

Α, Β ασυμβίβαστα $\Rightarrow \; A\cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; P(A\cap B) = 0$

και $\quad P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

Για $x = P(A)$, ο τύπος της συνάρτησης f δίνει

$$f\big(P(A)\big) = \big(P(A)\ - P(A\cup B)\big)^3 - \big((P(A)\ - P(A\cap B)\big)^3 =$$

$$= \big(P(A)\ - P(A)\ - P(B)\big)^3 - \big((P(A)\big)^3 = \big(-P(B)\big)^3 - \big(P(A)\big)^3 =$$

$$= -\big(P(B)\big)^3 - \big(P(A)\big)^3 \quad \mathbf{(3)}$$

Για $x = P(B)$, ο τύπος της συνάρτησης f δίνει

$$f\big(P(B)\big) = \big(P(B)\ - P(A\cup B)\big)^3 - \big((P(B)\ - P(A\cap B)\big)^3 =$$

$$= \big(P(B)\ - P(A)\ - P(B)\big)^3 - \big((P(B)\big)^3 =$$

$$= \big(-P(A)\big)^3 - \big(P(B)\big)^3 \quad \mathbf{(4)}$$

Από τις (3), (4) $\Rightarrow \quad f\big(P(A)\big) = f\big(P(B)\big)$