

ΛΥΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

B. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

Γ. α. Λ, β. Λ, γ. Σ

Δ. α.4, β. 2, γ. 1

ΘΕΜΑ 2ο

A.

Πρέπει να ισχύει $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\sqrt{x} \neq \sqrt{3} \Leftrightarrow$
 $x \neq 3$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = [0, 3) \cup (3, +\infty)$

B.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

| Κλάσεις σε χλμ | Κέντρο Κλάσης x_i | Συχνότητα Σε χλμ v_i | Σχετική. Συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική Συχνότητα N_i | Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$ |
|-------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| [5, 15) | 10 | 60 | 30 | 60 | 30 |
| [15, 25) | 20 | 76 | 38 | 136 | 68 |
| [25, 35) | 30 | 44 | 22 | 180 | 90 |
| [35, 45) | 40 | 20 | 10 | 200 | 100 |
| Σύνολο | | 200 | 100 | | |

A.

Η πρώτη γραμμή συμπληρώνεται ως εξής

$$x_1 = \frac{5+15}{2} = 10, \quad f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{60}{200} \cdot 100 = 30\%,$$

$$N_1 = v_1 = 60 \quad \text{και} \quad F_1\% = f_1\% = 30\%$$

Η δεύτερη σειρά συμπληρώνεται ως εξής

$$F_2 = 68\% \Leftrightarrow F_1 + f_2 = 68\% \Leftrightarrow 30\% + f_2 = 68\% \Leftrightarrow f_2 = 38\%$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow \frac{38}{100} = \frac{v_2}{200} \Leftrightarrow v_2 = 76$$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 60 + 76 = 136 \quad \text{και προφανώς } x_2 = 20$$

Για την τρίτη σειρά έχουμε

$$N_3 = 180 \Leftrightarrow N_2 + v_3 = 180 \Leftrightarrow 136 + v_3 = 180 \Leftrightarrow v_3 = 44$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{44}{200} \cdot 100 = 22\% \quad , \quad F_3\% = F_2\% + f_3\% = 68\% + 22\% = 90\%$$

$$\text{και } x_3 = 30$$

Για την τέταρτη σειρά έχουμε

$$x_4 = 40 \quad , \quad v_4 = 200 - v_1 - v_2 - v_3 = 200 - 60 - 76 - 44 = 20$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{20}{200} \cdot 100 = 10\%$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 180 + 20 = 200 \quad , \quad F_4\% = F_3\% + f_4\% = 90\% + 10\% = 100\%$$

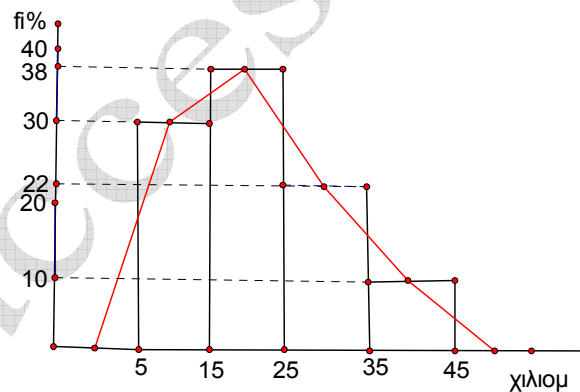
Στην τελευταία σειρά έχουμε $\Sigma f_i\% = 100$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

B.

Ιστόγραμμα ($x_i, f_i\%$)

Και πολύγωνο σχετικών
συχνοτήτων (κόκκινη γραμμή)



Γ.

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i = \frac{10 \cdot 60 + 76 \cdot 20 + 30 \cdot 44 + 40 \cdot 20}{200} = \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ km}$$

Δ.

Τουλάχιστον 25 χιλιόμετρα διανύουν τα οχήματα που βρίσκονται στην 3^η και στην 4^η κλάση δηλαδή : $44 + 20 = 64$ οχήματα

ΘΕΜΑ 4ο**A.**

$$f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

| | | | | | |
|------|-----------|---------------|---------------|-----------|---|
| x | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ | |
| f' | + | 0 | - | 0 | + |
| f | ↗ | | ↘ | | ↗ |

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \frac{1}{3}$

και τοπικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$

$$\text{Άρα } P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{1}{3}$$

B.

$$\text{i) } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ii) } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{iii) } P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Σημείωση : Ως γνωστόν τα ενδεχόμενα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα.