ΛΥΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδες 138-139

Γ. α. Σ, β Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ στ. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

Είναι $A=\mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{(x+2)'e^x-(e^x)'(x+2)}{(e^x)^2}=$

$$=\frac{e^x-e^x(x+2)}{(e^x)^2}=$$

$$=\frac{1-(x+2)}{e^x}=\frac{-x-1}{e^x}$$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f ΄	+	0	−
f	↗	|	↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, +\infty)$

Παρουσιάζει μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=\dfrac{1}{e^{-1}}=e$

β.

$f(x)+f'(x)=\dfrac{x+2}{e^x}+\dfrac{-1-x}{e^x}=\dfrac{x+2-1-x}{e^x}=\dfrac{1}{e^x}$

γ.

$f(0)=\dfrac{2}{e^0}=2 \quad , \quad f'(0)=\dfrac{-1}{e^0}=-1$

η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y-2=-x \quad \Leftrightarrow \quad y=-x+2$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Μέση τιμή όλων $\overline{x}_{ολ} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} + \ldots + x_{24} + x_{25}}{25} \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} + \ldots + x_{24} + x_{25}}{25} = 14 \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, οι δέκα χαμηλότεροι βαθμοί και $\overline{x}_{10}$ η μέση τιμή τους.

Τότε $\overline{x}_{10} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} \Leftrightarrow 11 = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} \Leftrightarrow$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 110 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω $\overline{x}_{υ}$ η μέση τιμή των υπολοίπων. Τότε $\overline{x}_{υ} = \dfrac{x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{24} + x_{25}}{15}$ **(3)**

Η (1) λόγω της (2) γίνεται $\dfrac{110 + x_{11} + \ldots + x_{24} + x_{25}}{25} = 14 \Leftrightarrow$

$$x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{25} = 350 - 110 \Leftrightarrow$$

$$x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{25} = 240$$

Οπότε η (3) δίνει $\overline{x}_{υ} = \dfrac{240}{15} = 16$

β.

Είναι $$S^2 = \frac{1}{ν}\left\{\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{ν} x_i\right)^2}{ν}\right\} = \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{ν} x_i\right)^2}{ν^2} =$$

$$= \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \frac{(ν \cdot \overline{x})^2}{ν^2} =$$

$$= \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \frac{ν^2 \cdot \overline{x}^2}{ν^2} =$$

$$= \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{25} \cdot 5000 - 14^2 = 4$$

Άρα $S = 2$, οπότε $CV = \dfrac{S}{\overline{x}} = \dfrac{2}{14} \approx 0{,}14 = 14\%$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Έστω $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6) = \lambda$ τότε

$P(1) = P(3) = P(5) = \lambda$ και $P(2) = P(6) = \frac{\lambda}{2}$ και $P(4) = \frac{\lambda}{4}$.

Αλλά $P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \Leftrightarrow$

$$1 = \lambda + \frac{\lambda}{2} + \lambda + \frac{\lambda}{4} + \lambda + \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{4}{17}$$

Οπότε $P(1) = P(3) = P(5) = \frac{4}{17}$, $P(2) = P(6) = \frac{2}{17}$ και $P(4) = \frac{1}{17}$

β.

Είναι $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{17} + \frac{1}{17} + \frac{2}{17} = \frac{5}{17}$

$P(B) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{4}{17} + \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = \frac{12}{17}$

γ.

$f'(x) = x^2 - 2kx + 4$ με $\Delta = 4k^2 - 16$

- Όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow k^2 > 4 \Leftrightarrow k > 2$
  Τότε το τριώνυμο $f'(x)$ έχει δύο ρίζες άνισες εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο, άρα η f αλλάζει μονοτονία.
  Επομένως για $k > 2$ η f δε μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow k = 2$
  Τότε το τριώνυμο $f'(x)$ έχει μία διπλή ρίζα ρ και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq \rho$.
  Επομένως για $k = 2$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Όταν $\Delta < 0 \Leftrightarrow k < 2$
  Τότε η $f'(x)$ δεν έχει καμία ρίζα και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
  Επομένως για $k < 2$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά λοιπόν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $0 \le k \le 2$,
δηλαδή όταν $k = 1$ ή $k = 2$, οπότε $\Gamma = \{1, 2\}$.

Άρα $P(\Gamma) = P(1) + P(2) = \frac{4}{17} + \frac{2}{17} = \frac{6}{17}$