# ΛΥΣΕΙΣ

# ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2004

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 89

**Β.** Α.3, Β.4, Γ.1, Δ. 2

**Γ.** Σ

**Δ.** Λ

**Ε.** Λ

**ΣΤ.** Σ

## ΘΕΜΑ 2ο

**α.**

Θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (4x^2 + 3) = 7$ ,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (6x + k) = 6 + k$ ,

$f(1) = 6 + k$

Άρα πρέπει $7 = 6 + k \Leftrightarrow k = 1$

**β.**

Όταν $x < 1$, είναι $f'(x) = 8x$ με $f'(-1) = -8$ και $f(-1) = 4 + 3 = 7$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow$

$y - 7 = -8(x + 1) \Leftrightarrow$

$y = -8x - 1$

**γ.**

Όταν $x > 1$, είναι $f'(x) = 6$ , οπότε $f'(5) = 6$

Όταν $x < 1$, είναι $f'(x) = 8x$, άρα $f'(-5) = -40$

$\mu f'(-5) + f'(5) + 34 = 0 \Leftrightarrow -40\mu + 6 + 34 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$

## ΘΕΜΑ 3ο

**α.**

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o = -2$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό , σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα ισχύει $f'(-2) = 0$

Όμως $f'(x) = 6x^2 - 6x + 6\alpha$

Οπότε $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 24 + 12 + 6\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Επίσης $f(-2) = 98 \Leftrightarrow -16 - 12 - 12\alpha + \beta = 98 \Leftrightarrow$

$-28 + 72 + \beta = 98 \Leftrightarrow \beta = 54$

**β.**

Για $\alpha = -6$ και $\beta = 54$ έχουμε $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 54$

και $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 3$

Πρόσημο της $f'$ και μονοτονία της $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | \| | $\searrow$ | \| | $\nearrow$ | |

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 3]$

**γ.**

Από το (β) προκύπτει ότι η $f$ παρουσιάζει τ. μέγιστο για $x = -2$ το $f(-2) = 98$

και τ. ελάχιστο για $x = 3$ το $f(3) = -27$

**δ.**

Η $f$ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ με $f(-1) = 85 > 0$ και $f(2) = -14 < 0$

Άρα με βάση το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$ και επειδή η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό, η ρίζα είναι μοναδική

# ΘΕΜΑ 4ο

**α.**

Αφού $z = x + yi$, έχουμε ότι $\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 \cdot i = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2yi}{2i}\right)^2 \cdot i = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \alpha \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad y^2 = 1-\alpha \quad \textbf{(2)}$$

$\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

**β.**

Αν $\alpha = 0$, η (1) δίνει $x = 0$ και η (2) $y^2 = 1$

Οπότε $z^2 + 1 = (x + yi)^2 + 1 = (yi)^2 + 1 = -y^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

**γ.**

Από την (1) έχουμε $\alpha = x^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$

Από την (2) έχουμε $1-\alpha = y^2 \geq 0 \Rightarrow 1-\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$

Τελικά $0 \leq \alpha \leq 1$

**δ.**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε $x^2 + y^2 = 1$, πράγμα που σημαίνει ότι οι εικόνες του z βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$