

ΛΥΣΕΙΣ**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2005****ΘΕΜΑ 1ο****A.**

1) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

2) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

B.

1. Σ , 2. Λ , 3. Λ , 4. Σ , 5. Σ

ΘΕΜΑ 2ο**α.**

$$z = \frac{x+3i}{2-i} = \frac{(x+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2x+xi+6i-3}{4+1} = \frac{2x-3}{5} + \frac{x+6}{5}i$$

Για να είναι ο z φανταστικός, πρέπει $\frac{2x-3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

β.

Αν $x = -6$ τότε $z = \frac{-15}{5} + 0i = -3 \in \mathbb{R}$

γ.

Αν $x = 4$ τότε $z = 1 + 2i$ οπότε $\bar{z} = 1 - 2i$ με $|\bar{z}| = \sqrt{5}$

ΘΕΜΑ 3ο**α.**

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ σαν πολυωνυμική

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3 + 1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^4 - 1) = 0$ και $f(1) = 0$

Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

β.

Έχουμε $f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 1 \\ 4x^3, & x > 1 \end{cases}$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$-$	$+$
f	↘			↗

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι , λόγω της συνέχειας στο 0, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

γ.

i) f συνεχής στο $[-1, 2]$

ii) f παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $f'(x) = -3x^2$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f'(x) = 4x^3$

$$\begin{aligned} \text{Στο } x_0 = 1 \text{ έχω } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^3 + 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-x^3 + 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x^2}{1} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^4 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^3}{1} = 4 \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -3 \neq 4 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, η f δεν παραγωγίζεται στο

1, άρα δεν παραγωγίζεται στο διάστημα $(-1, 2)$

iii) $f(-1) = 2 \neq 15 = f(2)$

Οπότε η f ικανοποιεί μόνο την πρώτη συνθήκη του θεωρήματος Rolle

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Είναι από υπόθεση $f'(0) = 1$

Όμως $f'(x) = \frac{k - 2x}{4}$, άρα $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{4} = 1 \Leftrightarrow k = 4$

β.

$$f'(x) = \frac{4 - 2x}{4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 2x}{4} > 0 \Leftrightarrow 4 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 2x}{4} < 0 \Leftrightarrow 4 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$ το $f(2) = 1$

γ.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$, ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (2, 4) \text{ \u03c9στε } f'(\xi) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} .$$

\u0394\u03b7\u03bb\u03b1\u03b4\u03b7 \u03b7 \u03b5\u03c6\u03b1\u03c0\u03c4\u03bf\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf $(\xi, f(\xi))$ \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03ac\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03b7 \u03c3\u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03b8\u03b5\u03b9\u03ac \u03b7 \u03c9\u03c0\u03b9\u03ac \u03b4\u03b9\u03b5\u03c1\u03c7\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03b1\u03c0\u03cc \u03c4\u03b1 \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03ac $A(2, f(2))$ \u03ba\u03b9 $B(4, f(4))$

\u038c\u03bc\u03c9\u03c2 $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$ \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b8\u03b5 $x \in (2, 4)$, \u03b4\u03b7\u03bb\u03b1\u03b4\u03b7 \u03b7 f' \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03b7\u03b7\u03c3\u03b9\u03c9\u03c2 \u03b1\u03cd\u03be\u03c9\u03c3\u03b1 \u03b1\u03c1\u03b1 \u03c4\u03bf ξ \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b4\u03b9\u03ba\u03cc .

netsuccess.gr