ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

2) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

Β.

1. Σ , 2. Λ , 3. Λ , 4. Σ , 5. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$z = \frac{x+3i}{2-i} = \frac{(x+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2x+xi+6i-3}{4+1} = \frac{2x-3}{5} + \frac{x+6}{5}i$$

Για να είναι ο z φανταστικός , πρέπει $\frac{2x-3}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$

β.

Αν $x = -6$ τότε $z = \frac{-15}{5} + 0i = -3 \in \mathbb{R}$

γ.

Αν $x = 4$ τότε $z = 1 + 2i$ οπότε $\overline{z} = 1 - 2i$ με $|\overline{z}| = \sqrt{5}$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ σαν πολυωνυμική

Είναι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^3+1) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^4-1) = 0$ και $f(1) = 0$

Δηλαδή $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, άρα η f είναι συνεχής και στο $x_o = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β.

Έχουμε $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 , & x < 1 \\ 4x^3 , & x > 1 \end{cases}$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f΄		−	0	−	‖	+	
f		↘		↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι , λόγω της συνέχειας στο 0, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\ \ 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1\ ,+\infty)$

γ.

i) f συνεχής στο $[-1, 2]$

ii) f παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 1)$ με $f'(x) = -3x^2$ και
παραγωγίσιμη στο $(1,\ 2)$ με $f'(x) = 4x^3$

Στο $x_o = 1$ έχω $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^3+1}{x-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\left(-x^3+1\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-3x^2}{1} = -3$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^4-1}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x^4-1\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4x^3}{1} = 4$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -3 \neq 4 = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν παραγωγίζεται στο 1, άρα δεν παραγωγίζεται στο διάστημα $(-1,\ 2)$

iii) $f(-1) = 2 \neq 15 = f(2)$

Οπότε η f ικανοποιεί μόνο την πρώτη συνθήκη του θεωρήματος Rolle

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Είναι από υπόθεση $f'(0) = 1$

Όμως $f'(x) = \dfrac{k-2x}{4}$, άρα $f'(0) = 1 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{k}{4} = 1 \ \Leftrightarrow\ k = 4$

β.

$f'(x) = \dfrac{4-2x}{4}$

$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 2$

$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{4-2x}{4} > 0 \ \Leftrightarrow\ 4-2x > 0 \ \Leftrightarrow\ x < 2$

$f'(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{4-2x}{4} < 0 \ \Leftrightarrow\ 4-2x < 0 \ \Leftrightarrow\ x > 2$

Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$ το $f(2) = 1$

γ.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,\ 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,\ 4)$, ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (2,\ 4)$ ώστε $f\,'(\xi) = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$.

Δηλαδή η εφαπτομένη στο $(\xi\ ,\ f(\xi))$ είναι παράλληλη στην ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(\ 2,\ f(2))$ και $B(4,\ f(4))$

Όμως $f\,''(\,x) = -\dfrac{1}{2} < 0$ για κάθε $x \in (2,\ 4)$, δηλαδή η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα άρα το ξ είναι μοναδικό .