ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2009

ΘΕΜΑ 1ο

α.

Πλήθος Κλήσεων x_i	Πλήθος Συνδρομητών ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα (%)	$x_i\nu_i$
2	4	16	4	16	8
3	6	24	10	40	18
4	5	20	15	60	20
5	7	28	22	88	35
6	2	8	24	96	12
7	1	4	25	100	7
Αθροίσματα	25	100	……….	……..	100

β.

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i = \frac{100}{25} = 4 \quad \text{κλήσεις}$$

γ.

$4 + 6 + 5 = 15$ συνδρομητές

δ.

$28\% + 8\% + 4\% = 40\%$

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = \lim_{x\to 6^+} \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6} = \lim_{x\to 6^+} \frac{(x-2)(x-6)}{x-6} = \lim_{x\to 6^+}(x-2) = 4$$

β.

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^-} e^{x-6}(2x-\mu) = e^0(2\cdot 6 - \mu) = 12 - \mu$$

γ.

Πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) \Leftrightarrow 4 = 12 - \mu \Leftrightarrow \mu = 8$

δ.

Θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = f(6)$

Όμως για $\mu = 8$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = 4$ και $f(6) = 3\lambda - 5$

Οπότε πρέπει $3\lambda - 5 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$$f'(x) = \frac{(x-2)'e^x - (e^x)'(x-2)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - e^x(x-2)}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x[1-(x-2)]}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{-x+3}{e^x}$$

β.

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{-x+3}{e^x} = 0 \iff x = 3$

$f'(x) > 0 \iff \dfrac{-x+3}{e^x} > 0 \iff -x+3 > 0 \iff x < 3$

$f'(x) < 0 \iff \dfrac{-x+3}{e^x} < 0 \iff -x+3 < 0 \iff x > 3$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$

γ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$ το $f(3) = \dfrac{3-2}{e^3} = \dfrac{1}{e^3}$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ έχουμε ότι

$f(0) = -5 \iff -2-\lambda = -5 \iff \lambda = 3$

Είναι $f'(x) = x^2 - 2kx + \lambda$ οπότε $f'(1) = 1 - 2k + \lambda$

Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$, θα είναι $f'(1) = 0 \iff$

$1 - 2k + \lambda = 0$

$1 - 2k + 3 = 0$

$k = 2$

β.

Για $k = 2$ και $\lambda = 3$ έχουμε $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ και

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

i.

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = 3$

Πρόσημο της f΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f΄		+	0	−	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f
είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

ii)

Η f για x = 1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(1) = -\dfrac{11}{3}$
και για x = 3 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(3) = -5$