ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 304

Β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 150

Γ. Σ, **Δ.** Σ, **Ε.** Λ, **ΣΤ.** Λ, **Ζ.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\ 0)$ σαν πολυωνυμική , συνεχής στο $(0,\ 1)$ σαν πολυωνυμική , και συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ σαν πράξεις συνεχών.

Για να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της θα πρέπει να είναι συνεχής και στα $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Άρα θα πρέπει να ισχύουν

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 0 \text{ και } \alpha = 1$$

β) i)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Η (1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

β) ii)

- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1 + x\ln x - 1}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x\ln x)'}{(x-1)'} =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1 + \ln x}{1} = 1$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1} = 1$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

Έστω $z = x + yi$.

$$w = \frac{x+yi}{(x+yi)^2+1} = \frac{x+yi}{x^2+2xyi-y^2+1} =$$

$$= \frac{(x+yi)(x^2-y^2+1-2xyi)}{(x^2+2xyi-y^2+1)(x^2-y^2+1-2xyi)} =$$

$$= \frac{x^3+xy^2+x}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} + \frac{-yx^2-y^3+y}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}i$$

$$w\in\mathbb{R} \iff \frac{-yx^2-y^3+y}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} = 0 \iff -yx^3-y^3+y=0$$

$$y(x^2+y^2-1)=0$$

$$y=0 \quad ή \quad x^2+y^2=1$$

- Για $y = 0$, είναι $z = x\in\mathbb{R}$
- Για $x^2+y^2=1$, είναι $|z|^2 = 1 \iff |z| = 1$

β)

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff \sqrt{3}\,z^2-3z+\sqrt{3}=0\ , \quad (\Delta = -3)$$

$$z_{1,2} = \frac{3\pm i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \quad και \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

γ)

Από τους τύπους Vieta έχουμε ότι $z_1+z_2 = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ και $z_1\cdot z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

Οπότε $K = \dfrac{1-i}{4+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{7}i$

ΘΕΜΑ 4ο

α)

$$f(1) = 1-1+\frac{1}{2}\int_1^1 f(t)dt = 0+0 = 0$$

β)

Επειδή η f συνεχής στο $(0, +\infty)$, η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Η υπόθεση $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow$

$$(x+1)f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 + \int_1^x f(t)dt$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $f(x) + (x+1)f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 + f(x) \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(x+1)}{x+1} = 3x - 1$$

γ)

$f'(x) = 3x - 1$, άρα $f(x) = 3\frac{x^2}{2} - x + c$

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$

Οπότε $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$, $x > 0$

δ)

Έχουμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{1}{3}$ απορρίπτεται

Πρόσημο της f

x	0		1		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Οπότε στο διάστημα [2, 4] είναι $f(x) > 0$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

ίσο με $E = \int_2^4\left(\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right]_2^4 = 21$ τ.μ