ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

β) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 97

γ) 1.Σ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+i}{1-3i}=\frac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{10i}{10}=i$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\frac{z_1}{z_2}=i \Leftrightarrow z_1=iz_2$

Οπότε $|iz_1+z_2|^2=|i^2z_2+z_2|^2=|-z_2+z_2|^2=|0|^2=0$

β)

$$\begin{aligned} z_1^{2006}+z_2^{2006} = (iz_2)^{2006}+z_2^{2006} &= i^{2006}z_2^{2006}+z_2^{2006} = \\ &= (i^2)^{1003}z_2^{2006}+z_2^{2006} = \\ &= (-1)^{1003}z_2^{2006}+z_2^{2006} = \\ &= -z_2^{2006}+z_2^{2006}=0 \end{aligned}$$

γ)

$$w=\frac{kz_1-iz_2}{z_2-kz_2}=\frac{kiz_2-iz_2}{z_2-kz_2}=\frac{iz_2(k-1)}{z_2(1-k)}=-i, \quad \text{οπότε } \mathrm{Im}(w)=-1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α)

Θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\alpha+1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0(-\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Και $f(0) = \alpha + 1$

Επομένως πρέπει $\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = -1$

B) i)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$

B) ii)

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & , \ x < 0 \\ 1 + \ln x & , \ x > 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		e^{-1}		$+\infty$
f ΄		+	||	−	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty \ \ 0]$ και $[e^{-1}, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0, e^{-1}]$

B) iii)

Στο διάστημα $[1, e]$, η f είναι συνεχής και προφανώς $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e =$$

$$= \frac{e^2 + 1}{4} \text{ τ. μ}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α)

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + e^x = \frac{x-1}{x} + e^x > 0$ για κάθε $x > 1$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

β)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x + e^x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$$

* Τα όρια της παρένθεσης υπολογίζονται εύκολα με L' Hospital

γ)

Έχουμε $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x - \ln x + e^x) = 1 + e$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(1 + e, +\infty)$, στο οποίο βρίσκεται το 2005. Άρα η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μία τουλάχιστον λύση, και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η λύση είναι μοναδική

δ)

Για το ολοκλήρωμα $I = \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$

Θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow f(u) = x$, άρα $dx = f'(u)du$

Όταν $x = f(2)$ τότε $f^{-1}(f(2)) = u \Leftrightarrow u = 2$

Όταν $x = f(e)$ τότε $f^{-1}(f(e)) = u \Leftrightarrow u = e$

Οπότε $I = \int_2^e u \cdot f'(u)du = \int_2^e x \cdot f'(x)dx$

Επομένως $\Pi = \int_2^e f(x)dx + \int_2^e x \cdot f'(x)dx = \int_2^e (f(x) + xf'(x))dx =$

$$= \int_2^e (x \cdot f(x))'dx =$$

$$= \left[xf(x)\right]_2^e =$$

$$= ef(e) - 2f(2) =$$

$$= e(e - 1 + e^e) - 2(2 - \ln 2 + e^2)$$

$$= e^2 - e + e^{e+1} - 4 + 2\ln 2 - 2e^2 =$$
$$= -e^2 - e + e^{e+1} - 4 + 2\ln 2$$

Άρα $\Pi - 2\ln 2 = -e^2 - e + e^{e+1} - 4$