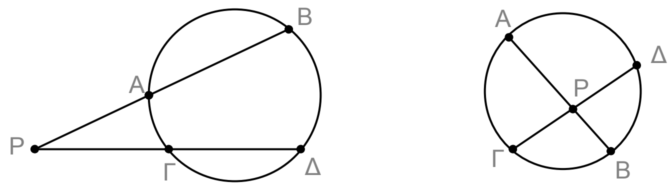
9.7
Τέμνουσες κύκλου

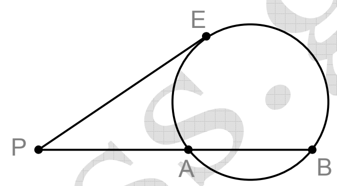
ΘΕΩΡΙΑ

1.
PAB και $P\Gamma\Delta$ τέμνουσες κύκλου, τότε $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$



2.
PE εφαπτομένη και PAB τέμνουσα, τότε

$$PE^2 = PA \cdot PB$$



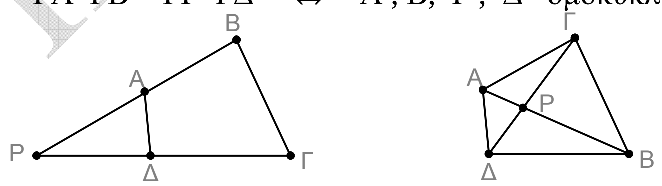
3.
Δύναμη σημείου P ως προς κύκλο (O, R) : $\Delta^{P}_{(O,R)} = OP^2 - R^2 = \delta^2 - R^2$

4.
$\Delta^{P}_{(O,R)} > 0 \iff$ το σημείο P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R)

$\Delta^{P}_{(O,R)} < 0 \iff$ το σημείο P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O, R)

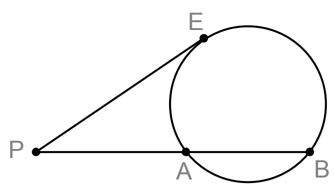
$\Delta^{P}_{(O,R)} = 0 \iff$ το σημείο P είναι σημείο του κύκλου (O, R)

5.
$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta \iff A, B, \Gamma, \Delta$ ομοκυκλικά



6.

$PE^2 = PA \cdot PB \iff PE$ εφαπτομένη

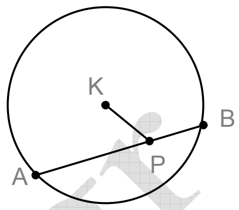


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται κύκλος (K, 24) και ένα σημείο P, έτσι ώστε PK = 12 . Αν μια χορδή AB διέρχεται από το P και έχει μήκος AB = 42, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων PA και PB.

Προτεινόμενη λύση



Αφού η ακτίνα του κύκλου είναι 24 και KP = 12 < 24, το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Ισχύει ότι $PA \cdot PB = R^2 - KP^2 \Leftrightarrow$

$PA \cdot (42 - PA) = 24^2 - 12^2$

$PA^2 - 42\,PA + 432 = 0$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε PA = 24 ή PA = 18

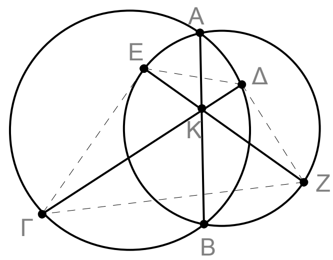
Για PA = 24, τότε PB = 42 − PA = 18

Για PA = 18, τότε PB = 42 − PA = 24

2.

Από σημείο K της κοινής χορδής AB δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε δύο ευθείες, που η μία τέμνει τον έναν κύκλο στα Γ και Δ, η δε άλλη τον άλλον κύκλο στα E και Z. Να δείξτε ότι τα σημεία Γ, Δ , E, Z είναι ομοκυκλικά .

Προτεινόμενη λύση



Ισχύει $K\Gamma \cdot K\Delta = KA \cdot KB$ και $KE \cdot KZ = KA \cdot KB \Rightarrow$

$K\Gamma \cdot K\Delta = KE \cdot KZ$

Οπότε, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή το τετράπλευρο Γ Ε Δ Ζ είναι εγγράψιμο, δηλαδή τα σημεία Γ, Δ , Ε ,Ζ είναι ομοκυκλικά.

3.

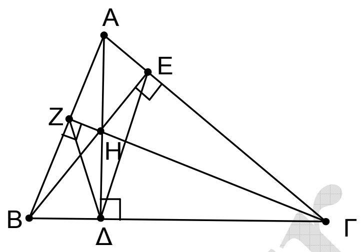
Αν ΑΔ, ΒΕ , ΓΖ είναι τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο, να δείξτε ότι

i) $ΗΑ \cdot ΗΔ = ΗΒ \cdot ΗΕ = ΗΓ \cdot ΗΖ$

ii) $ΑΗ \cdot ΑΔ = ΑΕ \cdot ΑΓ$

Προτεινόμενη λύση

i)



Τα σημεία Δ, Ε βλέπουν την ΑΒ με ίσες γωνίες (ορθές), άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμο, οπότε

$ΗΑ \cdot ΗΔ = ΗΒ \cdot ΗΕ$

Τα σημεία Ζ, Ε βλέπουν τη ΒΓ με ίσες γωνίες (ορθές), άρα το τετράπλευρο ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμο, οπότε

$ΗΖ \cdot ΗΓ = ΗΒ \cdot ΗΕ$

ii)

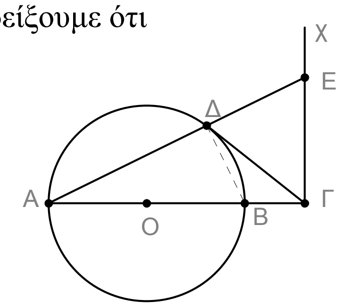
Οι γωνίες Ε και Δ του τετραπλεύρου ΕΗΔ Γ είναι ορθές, άρα είναι εγγράψιμο.
Οπότε $ΑΗ \cdot ΑΔ = ΑΕ \cdot ΑΓ$

4.

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και διάμετρός του ΑΒ. Από ένα σημείο Γ στην προέκταση της ΑΒ, προς το Β, φέρνουμε την εφαπτομένη ΓΔ και την $Γx \perp ΑΓ$.
Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΑΔ και Γx , δείξτε ότι $ΓΔ^2 = ΓΑ^2 - ΑΔ \cdot ΑΕ$.

Προτεινόμενη λύση

Γνωρίζουμε ότι $ΓΔ^2 = ΓΒ \cdot ΓΑ$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι



$$ΓΒ \cdot ΓΑ = ΓΑ^2 - ΑΔ \cdot ΑΕ$$

$$(ΓΑ - ΑΒ)\, ΓΑ = ΓΑ^2 - ΑΔ \cdot ΑΕ$$

$$ΓΑ^2 - ΑΒΓΑ = ΓΑ^2 - ΑΔ \cdot ΑΕ$$

$$ΑΒ \cdot ΓΑ = ΑΔ \cdot ΑΕ$$

Οι γωνίες Γ και Δ του τετραπλεύρου ΕΓΒΔ

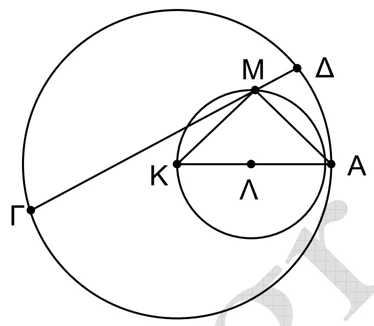
είναι ορθές, άρα είναι εγγράψιμο.

Επομένως $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΑΕ$

5.

Δύο κύκλοι (Κ, ρ) και $\left(\Lambda, \frac{\rho}{2}\right)$ εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Από σημείο Μ του μικρού κύκλου φέρνουμε χορδή ΓΔ του μεγάλου κύκλου. Δείξτε ότι $\text{ΜΓ}\cdot\text{ΜΔ} = \text{ΜΑ}^2$.

Προτεινόμενη λύση



Γνωρίζουμε ότι $\text{ΜΓ}\cdot\text{ΜΔ} = \rho^2 - \text{ΜΚ}^2$ **(1)**

$\text{Κ}\widehat{\text{Μ}}\text{Α} = 90^\circ$ σαν εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΚΜΑ :

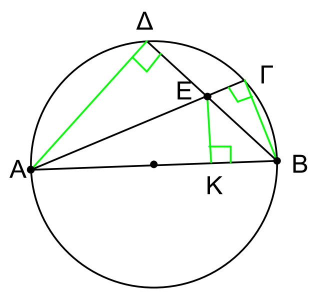
$\text{ΜΑ}^2 = \text{ΚΑ}^2 - \text{ΚΜ}^2 \iff \text{ΜΑ}^2 = \rho^2 - \text{ΚΜ}^2$

Η (1) γίνεται $\text{ΜΓ}\cdot\text{ΜΔ} = \text{ΜΑ}^2$

6.

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και διάμετρός του ΑΒ. Δύο χορδές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε,, Δείξτε ότι $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΓ} + \text{ΒΕ}\cdot\text{ΒΔ}$

Προτεινόμενη λύση



Φέρουμε την $\text{ΕΚ} \perp \text{ΑΒ}$ και τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ

Οι γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές σαν εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο.

$\hat{\text{Κ}} + \hat{\Gamma} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

το τετράπλευρο ΕΚΒΓ είναι εγγράψιμο $\Rightarrow$

$\text{ΑΚ}\cdot\text{ΑΒ} = \text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΓ}$ **(1)**

$\hat{\text{Κ}} = \hat{\Delta} \Rightarrow$ το τετράπλευρο ΑΔΕΚ είναι εγγράψιμο $\Rightarrow$

$\text{ΒΚ}\cdot\text{ΒΑ} = \text{ΒΕ}\cdot\text{ΒΔ}$ **(2)**

(1) + (2) : $\text{ΑΚ}\cdot\text{ΑΒ} + \text{ΒΚ}\cdot\text{ΑΒ} = \text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΓ} + \text{ΒΕ}\cdot\text{ΒΔ}$

$\text{ΑΒ}(\text{ΑΚ} + \text{ΒΚ}) = \text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΓ} + \text{ΒΕ}\cdot\text{ΒΔ}$

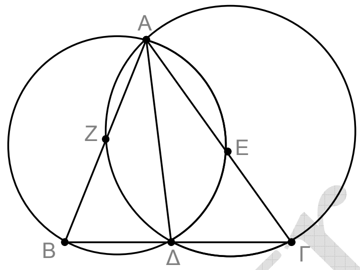
$\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΒ} = \text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΓ} + \text{ΒΕ}\cdot\text{ΒΔ}$

$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΓ} + \text{ΒΕ}\cdot\text{ΒΔ}$

7.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ τέμνουν τις ΑΓ, ΑΒ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ΒΖ = ΓΕ

Προτεινόμενη λύση



Τέμνουσες από το Β : $B\Delta \cdot B\Gamma = BZ \cdot BA$

Τέμνουσες από το Γ : $\Gamma\Delta \cdot \Gamma B = \Gamma E \cdot \Gamma A$

Διαιρώντας κατά μέλη : $\dfrac{B\Delta \cdot B\Gamma}{\Gamma\Delta \cdot \Gamma B} = \dfrac{BZ \cdot BA}{\Gamma E \cdot \Gamma A}$

$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{BZ \cdot BA}{\Gamma E \cdot \Gamma A} \quad \textbf{(1)}$$

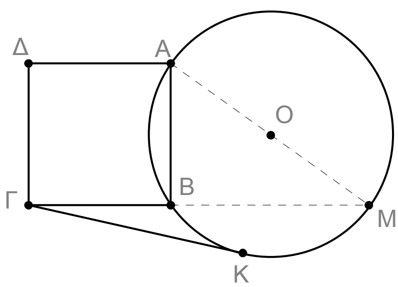
Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου : $\dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$

Η **(1)** γίνεται $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{BZ \cdot BA}{\Gamma E \cdot \Gamma A} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{BZ}{\Gamma E} \Leftrightarrow BZ = \Gamma E$

8.

Με πλευρά μια χορδή $AB = 1$ ενός κύκλου (O, ρ) κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ, του οποίου η πλευρά ΒΓ δεν έχει σημείο της εσωτερικό του κύκλου. Αν ΓΚ είναι εφαπτόμενο τμήμα με $\Gamma K = 2$, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου .

Προτεινόμενη λύση



Η προέκταση της ΓΒ τέμνει τον κύκλο σε στο Μ

Τότε $\Gamma K^2 = \Gamma B \cdot \Gamma M$

$4 = 1 \cdot \Gamma M$

$\Gamma M = 4$

Και $BM = \Gamma M - \Gamma B = 4 - 1 = 3$

Φέρνουμε την ΑΜ.

Αφού $A\hat{B}M = 90^o$, η ΑΜ θα είναι διάμετρος του κύκλου.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΜ έχουμε $AM^2 = AB^2 + BM^2$

$(2\rho)^2 = 1 + 3^2$

$4\rho^2 = 1 + 9 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$

9.

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και διάμετρος του ΑΒ. Από σημείο Μ του κύκλου φέρουμε κάθετη στην ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο Ζ και την ΑΒ στο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ = ΟΔ και φέρουμε την ΜΓ, η οποία τέμνει τον κύκλο στο Ε. Δείξτε ότι

i) $M\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B$

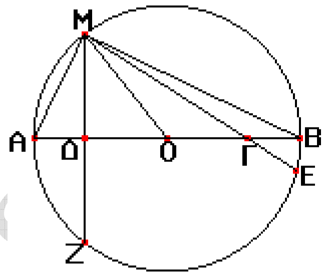
ii) $M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$.

iii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(R^2 + O\Delta^2)$

iv) $\dfrac{M\Gamma}{\Gamma E} + \dfrac{M\Delta}{\Delta Z} = \dfrac{2(R^2 + O\Delta^2)}{R^2 - O\Delta^2}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Φέρω τα ΜΑ και ΜΒ. Τότε $A\widehat{M}B = 90^o$ διότι είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΒ, το ΜΔ είναι το ύψος, άρα $M\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B$

ii)

Είναι $\Delta M \cdot \Delta Z = \Delta A \cdot \Delta B$

$\Delta M \cdot \Delta Z = (OA - O\Delta)\cdot(O\Delta + OB)$

$\Delta M \cdot \Delta Z = (R - O\Delta)\cdot(O\Delta + R)$

$\Delta M \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$

Ομοίως $M\Gamma \cdot \Gamma E = R^2 - O\Gamma^2$, και αφού ΟΓ = ΟΔ, τελικά είναι

$M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$.

iii)

Πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΜΔΓ : $M\Delta^2 + M\Gamma^2 = 2MO^2 + \dfrac{\Delta\Gamma^2}{2}$

$$M\Delta^2 + M\Gamma^2 = 2R^2 + \frac{(2\Delta O)^2}{2}$$

$$M\Delta^2 + M\Gamma^2 = 2R^2 + 2O\Delta^2$$

$$M\Delta^2 + M\Gamma^2 = 2(R^2 + O\Delta^2)$$

iv)

Λαμβάνοντας υπόψη τα **(ii)** και **(iii)** έχουμε $\dfrac{2(R^2 + O\Delta^2)}{R^2 - O\Delta^2} = \dfrac{M\Delta^2 + M\Gamma^2}{\Delta M \cdot \Delta Z}$

$$= \frac{M\Delta^2}{\Delta M \cdot \Delta Z} + \frac{M\Gamma^2}{\Delta M \cdot \Delta Z}$$

$$= \frac{M\Delta^2}{\Delta M \cdot \Delta Z} + \frac{M\Gamma^2}{M\Gamma \cdot \Gamma E}$$

$$= \frac{M\Delta}{\Delta Z} + \frac{M\Gamma}{\Gamma E}$$

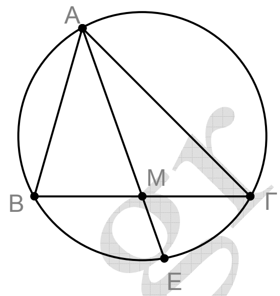
10.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Ε,

i) να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α

ii) να δείξετε ότι $AM \cdot AE = \dfrac{3\alpha^2}{2}$

Προτεινόμενη λύση



i)

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2+\gamma^2) - \alpha^2}{4}$$

$$= \frac{6\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4}$$

Άρα $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}$

ii)

$$\begin{aligned} AM \cdot AE &= AM \cdot (AM + ME) \\ &= AM^2 + AM \cdot ME \\ &= AM^2 + BM \cdot M\Gamma \\ &= \frac{5\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{2} \end{aligned}$$