10.1 – 10.3
Εμβαδά

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Εμβαδόν τετραγώνου : $E = \alpha^2$

2.
Εμβαδόν ορθογωνίου : $E = \alpha \cdot \beta$

3.
Εμβαδόν παρα/μμου : $E = \alpha \cdot \upsilon$

4.
Εμβαδόν τριγώνου : $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$

5.
Εμβαδόν τραπεζίου : $E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon$

6.
Εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου : $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

7.
Εμβαδόν τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους : $E = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2$

8.
ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ $\Rightarrow$ (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)

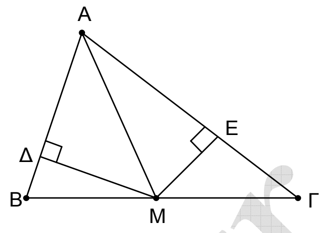
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν Μ το μέσο της ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και $Μ\Delta \perp ΑΒ$, $ΜΕ \perp ΑΓ$, δείξτε ότι

$Μ\Delta \cdot ΑΒ = ΜΕ \cdot ΑΓ$.

Προτεινόμενη λύση



Από εφαρμογή : (ΑΒΜ) = ΑΜΓ) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} ΑΒ\ \Delta Μ = \frac{1}{2} ΑΓ\ ΜΕ \Leftrightarrow$$

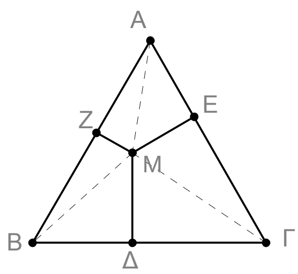
$$Μ\Delta \cdot ΑΒ = ΜΕ \cdot ΑΓ$$

2.

Έστω το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο αυτού και $Μ\Delta \perp Β\Gamma$, $ΜΕ \perp Α\Gamma$, $ΜΖ \perp ΑΒ$.

Δείξτε ότι $Μ\Delta + ΜΕ + ΜΖ = υ$ (όπου υ το ύψος του τριγώνου).

Προτεινόμενη λύση



Φέρνουμε τις ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ

Είναι (ΜΒΓ) + (ΜΓΑ) + (ΜΑΒ) = (ΑΒΓ) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} α \cdot Μ\Delta + \frac{1}{2} α \cdot ΜΕ + \frac{1}{2} α \cdot ΜΖ = \frac{1}{2} α \cdot υ \quad \Rightarrow$$

$$Μ\Delta + ΜΕ + ΜΖ = υ$$

3.

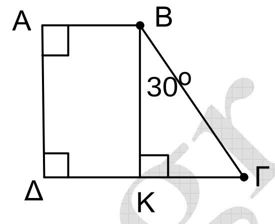
Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ $\parallel$ ΓΔ) στις εξής περιπτώσεις.

i) $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, $\hat{B} = 120^o$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta = \alpha$

ii) $AB = 4$, $\Gamma\Delta = 10$ και $A\Delta = B\Gamma = 5$.

Προτεινόμενη λύση

i)



Φέρνουμε $BK \perp \Delta\Gamma$

Αφού $A\hat{B}\Gamma = 120^o$, θα είναι $K\hat{B}\Gamma = 30^o$,

οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΓ θα είναι

$$K\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

και επειδή $\Delta\Gamma = \alpha$, θα είναι $\Delta K = \frac{\alpha}{2} = AB$

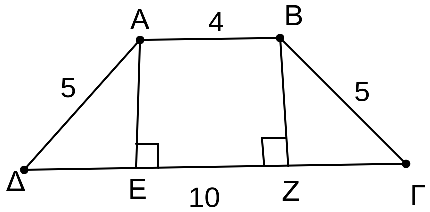
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{BK}{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BK}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$BK = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Οπότε $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Gamma\Delta)BK}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha\right)\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{8}$

ii)



Φέρνοντας τα ύψη ΑΕ και ΒΖ, εύκολα

διαπιστώνουμε ότι $\Delta E = Z\Gamma = 3$

Με Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ

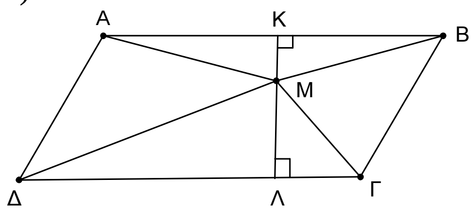
βρίσκουμε ότι $BZ = 4$.

Άρα το εμβαδό του τραπεζίου είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Gamma\Delta)BZ}{2} = \frac{(4+10)4}{2} = 28$

4.

Αν Μ εσωτερικό σημείο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ,δείξτε ότι :

$$(ΜΑΒ) + (ΜΓΔ) = (ΜΑΔ) + (ΜΒΓ)$$



Προτεινόμενη λύση

Από το Μ φέρνουμε την ΚΜΛ $\perp$ ΔΓ. Τότε

$$(ΜΑΒ) + (ΜΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΚΜ + \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΜΛ$$

$$= \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΚΜ + \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΜΛ$$

$$= \frac{1}{2} ΑΒ\,(ΚΜ + ΜΛ)$$

$$= \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΚΛ = \frac{1}{2} (ΑΒΓΔ)$$

Οπότε θα είναι και $(ΜΑΔ) + (ΜΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$

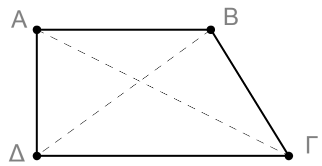
Άρα $(ΜΑΒ) + (ΜΓΔ) = (ΜΑΔ) + (ΜΒΓ)$

5.

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 4$, $ΑΔ = 3$, $ΓΔ = 2\sqrt{10}$, $ΑΓ = 7$ και $ΒΔ = 5$.

i) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου.



Προτεινόμενη λύση

i)

Φέρνουμε τις ΑΓ, ΒΔ.

Είναι $ΑΔ^2 + ΑΒ^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 = ΒΔ^2$,

άρα το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ορθογώνιο με $Δ\hat{Α}Β = 90^o$

Επίσης $ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 9 + 40 = 49 = ΑΓ^2$,

άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με $Α\hat{Δ}Γ = 90^o$

Αφού $ΑΒ \perp ΑΔ$ και $ΓΔ \perp ΑΔ$ θα είναι ΑΒ//ΓΔ οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο

ii)

Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{(ΑΒ + ΓΔ)ΑΔ}{2}$

$$= \frac{(4 + 2\sqrt{10})3}{2}$$

$$= 6 + 3\sqrt{10}$$

6.

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ ∥ ΓΔ), φέρνουμε το ύψος ΑΕ.

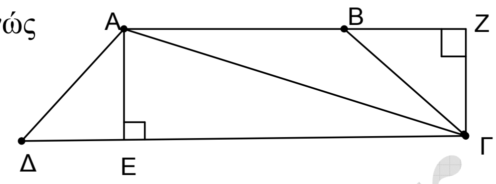
Δείξτε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΑΕΓ).

Προτεινόμενη λύση

Φέρνουμε και το ύψος ΓΖ.

Τότε το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο και προφανώς

(ΑΕΓΖ) = 2(ΑΕΓ).



Οπότε αρκεί να αποδείξω ότι

(ΑΒΓΔ) = (ΑΕΓΖ) $\Leftrightarrow$

(ΑΔΕ) + (ΑΒΓΕ) = (ΒΓΖ) + (ΑΒΓΕ) $\Leftrightarrow$

(ΑΔΕ) = (ΒΓΖ)

Πράγμα το οποίο ισχύει διότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν ΑΔ = ΒΓ, από την υπόθεση και ΑΕ = ΓΖ, σαν κάθετα τμήματα μεταξύ παραλλήλων.

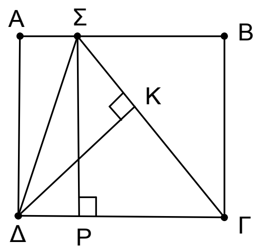
7.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α = 4 και σημείο Σ της ΑΒ, ώστε ΑΣ = 1.

Να υπολογιστεί η απόσταση του Δ από την ΓΣ.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ΔΚ η απόσταση του Δ από την ΓΣ και ΣΡ ⊥ ΔΓ.



Είναι $(ΔΣΓ) = \frac{1}{2} ΓΣ \cdot ΔΚ = \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΣΡ$

$ΓΣ \cdot ΔΚ = 4 \cdot 4$

$ΓΣ \cdot ΔΚ = 16$ **(1)**

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΣΒΓ : $ΓΣ^2 = ΒΓ^2 + ΒΣ^2$

$ΓΣ^2 = 16 + 9 = 25$

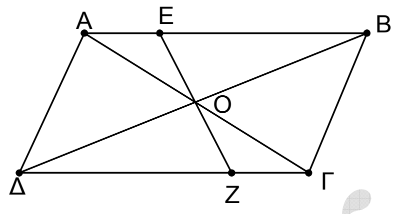
$ΓΣ = 5$

Η (1) $\Rightarrow$ $ΔΚ = \frac{16}{5}$

8.

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο του Ο φέρνουμε ευθεία που τέμνει την ΑΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Δείξτε ότι (ΑΕΖΔ) = (ΒΓΖΕ)

Προτεινόμενη λύση



Τα τραπέζια ΑΕΖΔ και ΒΓΖΕ έχουν

ΕΒ = ΔΖ (τριγ ΒΟΕ = τριγΔΟΖ) και

ΑΕ = ΖΓ (τριγ ΑΕΟ = τριγ ΓΟΖ)

Το δε ύψος τους ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ.

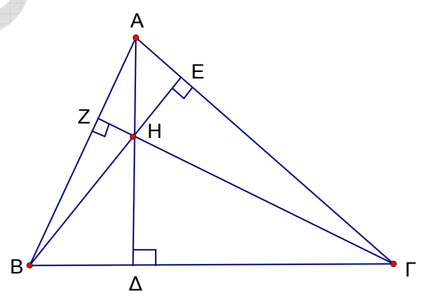
Άρα θα έχουν ίσα εμβαδά

9.

Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ύψη οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρό του,

δείξτε ότι $\dfrac{Η\Delta}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{ΗΕ}{\upsilon_\beta}+\dfrac{ΗΖ}{\upsilon_\gamma}=1$

Προτεινόμενη λύση



Είναι (ΒΗΓ) + (ΑΗΓ) + (ΑΗΒ) = (ΑΒΓ) $\Leftrightarrow$

$$\frac{(ΒΗ\Gamma)}{(ΑΒ\Gamma)}+\frac{(ΑΗ\Gamma)}{(ΑΒ\Gamma)}+\frac{(ΑΗΒ)}{(ΑΒ\Gamma)}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}Β\Gamma\cdot Η\Delta}{\frac{1}{2}Β\Gamma\cdot\upsilon_\alpha}+\frac{\frac{1}{2}Α\Gamma\cdot ΗΕ}{\frac{1}{2}Α\Gamma\cdot\upsilon_\beta}+\frac{\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΗΖ}{\frac{1}{2}ΑΒ\cdot\upsilon_\gamma}=1 \Leftrightarrow$$

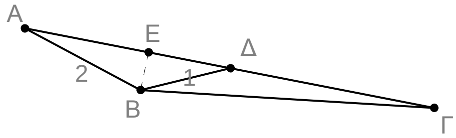
$$\frac{Η\Delta}{\upsilon_\alpha}+\frac{ΗΕ}{\upsilon_\beta}+\frac{ΗΖ}{\upsilon_\gamma}=1$$

10.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ =2, η διάμεσος ΒΔ =1 και $B\hat{\Delta}A = 30^0$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση



Φέρνουμε το ύψος ΒΕ

Αφού $B\hat{\Delta}A = 30^0$, θα είναι $BE = \frac{B\Delta}{2}$

$$BE = \frac{1}{2}$$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΕ και ΒΕΔ έχουμε ότι

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 \qquad E\Delta^2 = B\Delta^2 - BE^2$$

$$AE^2 = 4 - \frac{1}{4} \qquad E\Delta^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$AE = \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad E\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ επομένως}$$

Είναι $A\Delta = AE + E\Delta = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$, οπότε $(AB\Delta) = \frac{1}{2} A\Delta \cdot BE$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$$

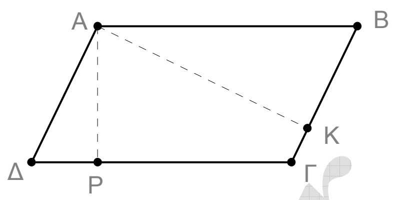
Οπότε $(AB\Gamma) = 2(AB\Delta) = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$

11.

Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 2α και το ένα ύψος του είναι διπλάσιο από το άλλο. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του συναρτήσει του α.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι το ύψος ΑΚ είναι διπλάσιο του ύψους ΑΡ.



Είναι $2\Delta\Gamma + 2\text{Β}\Gamma = 2\alpha \Leftrightarrow$

$\Delta\Gamma + \text{Β}\Gamma = \alpha$ **(1)**

Και $(\text{ΑΒ}\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot \text{ΑΡ} = \text{Β}\Gamma \cdot \text{ΑΚ} \Leftrightarrow$

$\Delta\Gamma \cdot \text{ΑΡ} = \text{Β}\Gamma \cdot 2\text{ΑΡ} \Leftrightarrow$

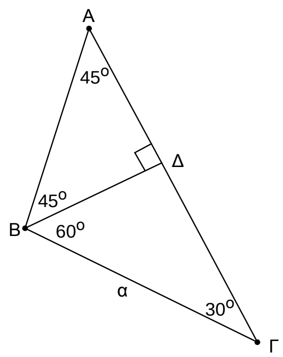
$\Delta\Gamma = 2\,\text{Β}\Gamma$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\text{Β}\Gamma = \frac{\alpha}{3}$ και $\Delta\Gamma = \frac{2\alpha}{3}$

12 .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του α, όταν ΒΓ= α, $\hat{\text{Α}} = 45^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$

Προτεινόμενη λύση



Φέρνουμε το ύψος ΒΔ.

Αφού $\hat{\Gamma} = 30^o$ και $\hat{\text{Α}} = 45^o$, θα είναι

$\text{Α}\hat{\text{Β}}\Delta = 45^o$ και $\Delta\hat{\text{Β}}\Gamma = 60^o$

Στο ορθογώνιο τρ. ΒΔΓ, $\hat{\Gamma} = 30^o \Rightarrow \text{Β}\Delta = \frac{\text{Β}\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$

και $\eta\mu 60^o = \frac{\Delta\Gamma}{\text{Β}\Gamma} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ επίσης

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, $\hat{\text{Α}} = 45^o = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Delta \Rightarrow \text{Α}\Delta = \text{Β}\Delta = \frac{\alpha}{2}$

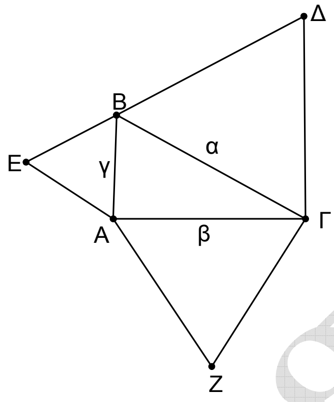
Τότε $\text{Α}\Gamma = \text{Α}\Delta + \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha + \alpha\sqrt{3}}{2}$

Οπότε $(\text{ΑΒ}\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \text{Α}\Gamma \cdot \text{Β}\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha + \alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2 + \alpha^2\sqrt{3}}{8}$

13.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ, ΑΒΕ, ΑΓΖ εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ. Δείξτε ότι (ΒΓΔ) = (ΑΒΕ) + (ΑΓΖ).

Προτεινόμενη λύση



(ΒΓΔ) = (ΑΒΕ) + (ΑΓΖ) $\Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

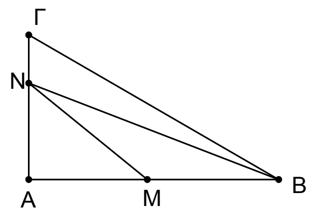
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Που ισχύει, αφού το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την α

14

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ και σημείο Ν της ΑΓ έτσι ώστε $ΓΝ = \frac{ΑΓ}{3}$. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΜΒΝ και ΒΓΝ είναι ισοδύναμα

Προτεινόμενη λύση



$$(ΜΒΝ) = \frac{1}{2}ΜΒ \cdot ΝΑ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ΑΒ\cdot\frac{2}{3}ΑΓ = \frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{6}$$

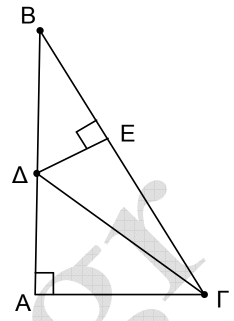
$$(ΓΒΝ) = \frac{1}{2}ΓΝ \cdot ΑΒ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ΑΓ \cdot ΑΒ = \frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{6}$$

Οπότε (ΜΒΝ) = (ΒΓΝ)

15.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ . Έστω Δ το μέσο της ΑΒ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Αν $(ΒΔΕ) = \frac{3}{8}(ΑΔΓ)$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{Β}$.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή ΓΔ διάμεσος στο ΑΒΓ, θα είναι (ΑΓΔ) = (ΒΓΔ)

$$(ΒΔΕ) = \frac{3}{8}(ΑΔΓ) \quad \Leftrightarrow \quad (ΒΔΕ) = \frac{3}{8}(ΒΓΔ)$$

$$\frac{1}{2}ΒΕ \cdot ΔΕ = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΔΕ$$

$$ΒΕ = \frac{3}{8}ΒΓ$$

$$συν\hat{Β} = \frac{ΒΕ}{ΒΔ} \quad και \quad συν\hat{Β} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \quad \Rightarrow \quad \frac{ΒΕ}{ΒΔ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$ΒΕ\ ΒΓ = ΑΒ\ ΒΔ$$

$$\frac{3}{8}ΒΓ \cdot ΒΓ = ΑΒ \cdot \frac{1}{2}ΑΒ$$

$$ΑΒ^2 = \frac{3}{4}ΒΓ^2$$

$$ΑΒ = \frac{\sqrt{3}}{2}ΒΓ$$

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν\hat{Β} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Β} = 30^o$$