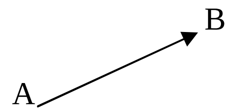
1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Διάνυσμα

Λέγεται κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. (έχει αρχή και πέρας)



2.

Μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$

Λέγεται το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

3.

Μέτρο ή μήκος διανύσματος

Λέγεται το μήκος του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος.

$|\overrightarrow{AB}| = (AB)$

4.

Μοναδιαίο διάνυσμα

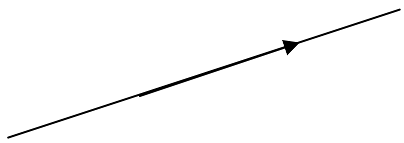
Λέγεται το διάνυσμα του οποίου το μέτρο είναι 1.

$|\vec{\alpha}| = 1$

5.

Φορέας διανύσματος

Λέγεται η ευθεία στην οποία ανήκει.



6.

Διάνυσμα παράλληλο προς ευθεία

Όταν ο φορέας του διανύσματος είναι παράλληλος ή συμπίπτει με την ευθεία.

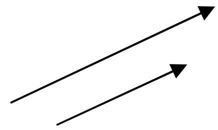
7.

Συγγραμμικά ή παράλληλα διανύσματα

Όταν είναι μη μηδενικά και έχουν παράλληλους ή ίδιους φορείς.
Εδώ λέμε ότι τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση

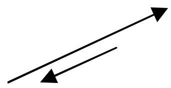
8.
Δύο ομόρροπα διανύσματα

Όταν είναι συγγραμμικά και ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που ορίζουν οι αρχές των διανυσμάτων.
Εδώ λέμε ότι τα διανύσματα έχουν ίδια φορά (κατεύθυνση)



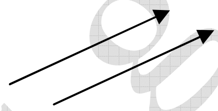
9.
Δύο αντίρροπα διανύσματα

Όταν είναι συγγραμμικά και έχουν αντίθετη φορά.



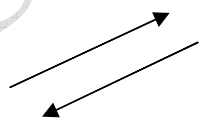
10.
Δύο ίσα διανύσματα

Όταν έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.



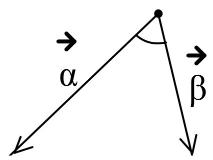
11.
Δύο αντίθετα διανύσματα

Όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.



12.
Γωνία δύο διανυσμάτων

Λέγεται η κυρτή γωνία των φορέων τους.



$$0^o \le \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) \le 180^o$$

13.
Δύο κάθετα διανύσματα

Όταν η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{2}$

14.
Ισχύουν οι ισοδυναμίες

i) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα $\Leftrightarrow$ $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 0$

ii) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίρροπα $\Leftrightarrow$ $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \pi$

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Διεύθυνση

Η έννοια «διεύθυνση ευθείας » είναι πρωταρχική έννοια των Μαθηματικών, δηλαδή δεν ορίζεται.

Για να την προσεγγίσουμε, μπορούμε να πούμε ότι, καθορίζει τον προσανατολισμό μιας ευθείας ή παράλληλων ευθειών.

2.

Παραδοχή

α) κάθε ευθεία ορίζει μία διεύθυνση

β) οι παράλληλες ευθείες έχουν ίδια διεύθυνση

γ) κάθε σύνολο παράλληλων ευθειών ορίζει μία διεύθυνση

3.

Παραδοχή

Κάθε διεύθυνση είναι εφοδιασμένη με θετική και αρνητική φορά (κατεύθυνση).

4.

Διεύθυνση διανύσματος

Λέγεται η διεύθυνση του φορέα του.

5.

Φορά διανύσματος

Λέγεται η θετική ή αρνητική κατεύθυνση του φορέα του.

6.

Τα συγγραμμικά διανύσματα

έχουν ίδια διεύθυνση (όχι οπωσδήποτε ίδιο φορέα)

7.

Τα ομόρροπα διανύσματα

έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά.

8.

Τα αντίρροπα διανύσματα

έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.

9.
Τα ίσα διανύσματα
έχουν ίδια διεύθυνση φορά και μέτρο

10.
Τα αντίθετα διανύσματα
έχουν ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίσα μέτρα.

11.
Η γωνία των ομόρροπων διανυσμάτων
είναι 0.

12.
Η γωνία των αντίρροπων διανυσμάτων
είναι π.

13.
Προφανής ισότητα
$\left(\vec{\alpha},\widehat{\ \vec{\beta}}\right)=\left(\vec{\beta},\widehat{\ \vec{\alpha}}\right)$

14.
Για να σχηματίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων,
τα μεταφέρουμε παράλληλα στον εαυτό τους ώστε να έχουν κοινή αρχή

15.
Παραδοχή
Το $\vec{0}$ έχει οποιαδήποτε διεύθυνση και οποιαδήποτε φορά.

16.
Άνισα διανύσματα
δεν υπάρχουν, άρα ποτέ δε θα γράψουμε $\vec{\alpha} > \vec{\beta}$

17.
Στη Διανυσματική Γεωμετρία
μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις γνώσεις της Ευκλείδειας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Απαντήστε στις ερωτήσεις
i) Πότε δύο διανύσματα λέγονται συγγραμμικά
ii) Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα
iii) Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα

2.

Χαρακτηρίστε σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις
i) Αν δύο διανύσματα είναι ίσα, τότε έχουν ίσα μέτρα.
ii) Αν δύο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι ίσα.
iii) Τα συγγραμμικά διανύσματα έχουν ίδιο φορέα.

Απάντηση
i) Σωστή
ii) Λάθος
iii) Λάθος

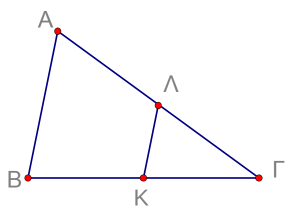
3.

Απαντήστε στις ερωτήσεις
i) Τι ονομάζουμε γωνία δύο διανυσμάτων;
ii) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η γωνία δύο διανυσμάτων;

4.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τα μέσα Κ, Λ των ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα και φέρουμε το τμήμα ΚΛ. Να αναφέρετε

i) δύο ίσα διανύσματα
ii) δύο αντίθετα διανύσματα
iii) δύο ομόρροπα και όχι ίσα διανύσματα
iv) δύο αντίρροπα διανύσματα
v) δύο διανύσματα με κοινή αρχή
vi) δύο διαδοχικά διανύσματα



Προτεινόμενη απάντηση

i) $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{K\Gamma}$
ii) $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{K\Gamma}$
iii) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Lambda K}$
iv) $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Lambda A}$
v) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$
vi) $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{K\Lambda}$

5.

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το σημείο τομής των διαγωνίων του Ο. Πώς χαρακτηρίζονται μεταξύ τους τα διανύσματα

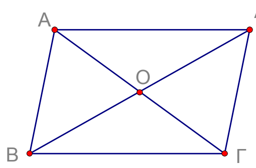
i) $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$

ii) $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$

iii) $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΟΓ}$

iv) $\overrightarrow{ΑΟ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$

Προτεινόμενη απάντηση



i) Ίσα

ii) Αντίθετα

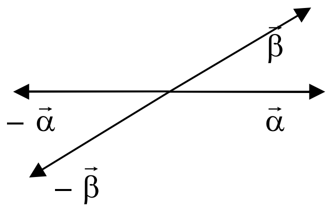
iii) Αντίθετα

iv) Ομόρροπα

6.

Αν $(\widehat{\vec{α}, \vec{β}}) = \frac{π}{6}$, υπολογίστε τις $(\widehat{-\vec{α}, \vec{β}})$, $(\widehat{-\vec{α}, -\vec{β}})$

Προτεινόμενη απάντηση



$$(\widehat{-\vec{α}, \vec{β}}) = π - (\widehat{\vec{α}, \vec{β}}) = π - \frac{π}{6} = \frac{5π}{6}$$

$$(\widehat{-\vec{α}, -\vec{β}}) = (\widehat{\vec{α}, \vec{β}}) = \frac{π}{6}$$

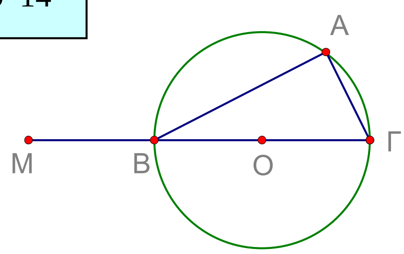
6.

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, διάμετρός του ΒΓ και σημείο του Α. Αν $\overrightarrow{ΟΒ} = \vec{β}$, $\overrightarrow{ΒΑ} = \vec{α}$ και $(\widehat{\vec{α}, \vec{β}}) = \frac{5π}{6}$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 14

Θεωρούμε διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΜ} = \vec{β}$,



οπότε $(\widehat{\overrightarrow{ΒΜ}, \overrightarrow{ΒΑ}}) = \frac{5π}{6} = 150^o$

Άρα $Μ\hat{Β}Α = 150^o \Rightarrow Α\hat{Β}Γ = 30^o$

$\hat{Α} = 90^o$ αφού βαίνει σε ημικύκλιο

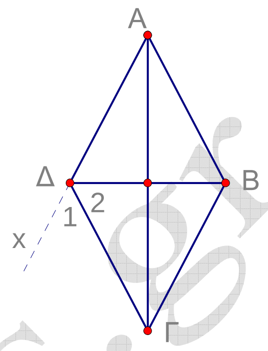
άρα $\hat{Γ} = 60^o$

7.

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\left(\widehat{\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{ΑΒ}}\right) = 40^o$. Να βρείτε τις γωνίες

$\left(\widehat{\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{Α\Gamma}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta Β},\overrightarrow{Α\Gamma}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta Β},\overrightarrow{Β\Gamma}}\right)$

Προτεινόμενη λύση



$\left(\widehat{\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{Α\Gamma}}\right) = \Delta\hat{Α}\Gamma = 20^o$

αφού η ΑΓ είναι διχοτόμος

$\left(\widehat{\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right) = x\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{Α}Β = 40^o$

Σχόλιο 14

(εντός – εκτός – επί τα αυτά)

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta Β},\overrightarrow{Α\Gamma}}\right) = 90^o$,

αφού οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta Β},\overrightarrow{Β\Gamma}}\right) = x\hat{\Delta}Β = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2$

$= \Delta\hat{Α}Β + \frac{1}{2}Α\hat{\Delta}\Gamma$

$= 40^o + \frac{1}{2}(180^o - 40^o) = 40^o + 70^o = 110^o$