1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$

$\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

2.
Ορισμός

$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$

3.
Πολύ χρήσιμη ισότητα

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ και ανάποδα $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

4.
Η τριγωνική ανισότητα

$\big|\,|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\,\big| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Το διάνυσμα θέσεως σημείου

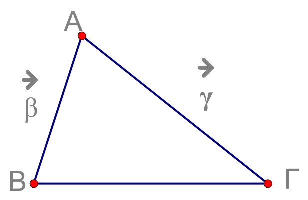
Έστω σταθερό σημείο Ο (**σημείο αναφοράς**)

Στο τυχαίο σημείο Μ αντιστοιχούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, που λέγεται **διάνυσμα θέσεως του σημείου Μ** ή **διανυσματική ακτίνα του σημείου Μ** .
Αυτή η αντιστοιχία μας επιτρέπει, αντί να μιλάμε για σημεία να μιλάμε για διανύσματα, πράγμα το οποίο μας διευκολύνει, αφού στα διανύσματα έχουμε πράξεις και ιδιότητες, που δε συμβαίνει στα σημεία.

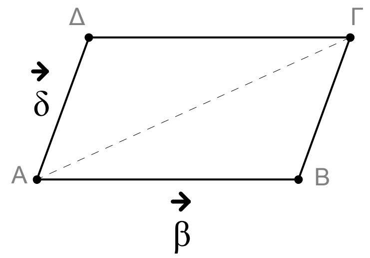
2.
Καθορισμός τριγώνου διανυσματικά

Για να ορίσουμε τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma}$, οπότε

$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \vec{\gamma} - \vec{\beta}$

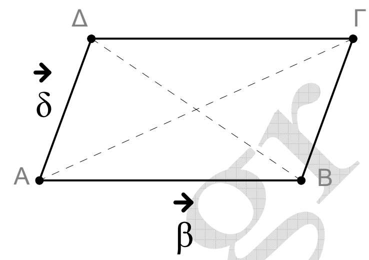


3.
Καθορισμός παραλληλογράμμου διανυσματικά



Για να ορίσουμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$, οπότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta}$.

4.
Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου



Έχοντας παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$, είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta}$
και $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB} = \vec{\delta} - \vec{\beta}$

5.
Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα

$\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίρροπα

Η απόδειξη θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο

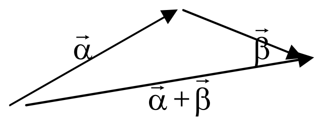
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

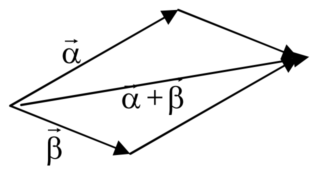
Θεώρησε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και σχημάτισε το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με τους δύο γνωστούς τρόπους από τη θεωρία.

Προτεινόμενη λύση

i) Καθιστάμε τα διανύσματα διαδοχικά



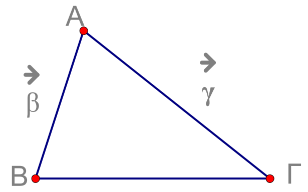
ii) Καθιστάμε τα διανύσματα με κοινή αρχή και
και κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο



2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, δίνεται ότι $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma}$. Ποιο διάνυσμα του σχήματος είναι η διαφορά $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ και ποιο η διαφορά $\vec{\gamma} - \vec{\beta}$

Απάντηση



$$\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$$

$$\vec{\gamma} - \vec{\beta} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$$

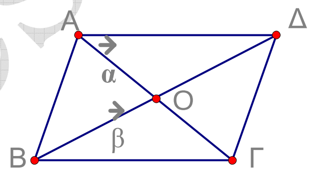
3.

Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Προτεινόμενη λύση

Σημείο αναφοράς το Ο

Κατ'αρχήν είναι $\overrightarrow{O\Gamma} = -\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{O\Delta} = -\vec{\beta}$



$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{O\Delta} = -\vec{\alpha} - (-\vec{\beta}) = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} - (-\vec{\beta}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = -\vec{\alpha} - \vec{\alpha}$$

4.

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BZ}$$

Προτεινόμενη λύση

1ος τρόπος

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{EA} &= \left(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{EA}\right) + \left(\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta Z}\right) \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{BZ} \\ &= \overrightarrow{BZ} \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{A\Gamma} + \left(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma}\right) + \left(\overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Delta}\right) - \overrightarrow{AE} \\ &= \cancel{\overrightarrow{A\Gamma}} + \cancel{\overrightarrow{A\Delta}} - \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{AE}} - \cancel{\overrightarrow{A\Gamma}} + \overrightarrow{AZ} - \cancel{\overrightarrow{A\Delta}} - \cancel{\overrightarrow{AE}} \\ &= \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BZ} \end{aligned}$$

5.

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε. Αν $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \overrightarrow{\text{ΒΕ}}$, να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του τμήματος ΔΕ.

Προτεινόμενη λύση

Απαλλασσόμαστε από τα σημεία Α, Β, δηλαδή από τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΓΑ}}$, $\overrightarrow{\text{ΓΒ}}$

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Γ.

$\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \overrightarrow{\text{ΒΓ}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{ΓΔ}} - \overrightarrow{\text{ΓΑ}} = -\overrightarrow{\text{ΓΒ}}$

$\overrightarrow{\text{ΓΔ}} = \overrightarrow{\text{ΓΑ}} - \overrightarrow{\text{ΓΒ}}$ **(1)**

$\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \overrightarrow{\text{ΒΕ}} \Rightarrow -\overrightarrow{\text{ΓΑ}} = \overrightarrow{\text{ΓΕ}} - \overrightarrow{\text{ΓΒ}}$

$\overrightarrow{\text{ΓΕ}} = \overrightarrow{\text{ΓΒ}} - \overrightarrow{\text{ΓΑ}}$ **(2)**

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $\overrightarrow{\text{ΓΔ}} = -\overrightarrow{\text{ΓΕ}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{ΓΔ}} = \overrightarrow{\text{ΕΓ}}$

$\overrightarrow{\text{ΕΓ}} = \overrightarrow{\text{ΓΔ}}$

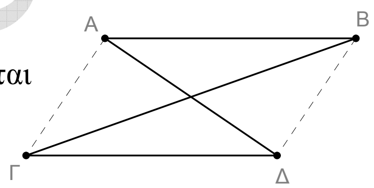
Γ μέσο του ΕΔ

6.

Αν $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \overrightarrow{\text{ΓΔ}}$, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο.

Προτεινόμενη λύση

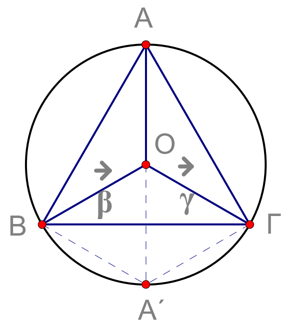
$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \overrightarrow{\text{ΓΔ}} \Rightarrow$ ΑΒΔΓ παραλληλόγραμμο
οι διαγώνιοί ΑΔ, ΒΓ διχοτομούνται
άρα έχουν κοινό μέσο



7.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Αν $\overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} = \vec{\gamma}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Προτεινόμενη λύση



Η προέκταση της ακτίνας ΟΑ επανατέμνει τον κύκλο στο μέσο Α΄ του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$.

Άρα $\text{ΒΑ}' = \text{Α}'\text{Γ} = \lambda_6 = R = \text{ΟΒ} = \text{ΟΓ}$

Επομένως το τετράπλευρο ΟΒΑ΄Γ είναι ρόμβος.

Άρα $\overrightarrow{\text{ΟΑ}'} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow$

$-\overrightarrow{\text{ΟΑ}} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

$\overrightarrow{\text{ΟΑ}} = -(\vec{\beta} + \vec{\gamma})$

8.

Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να αποδείξετε την ισοδυναμία

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}-\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

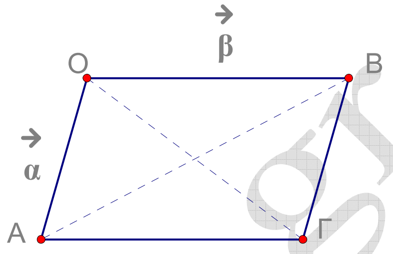
Προτεινόμενη λύση

Ευθύ

Με υπόθεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}-\vec{\beta}$, θα αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

Έστω ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Πρέπει να φθάσουμε σε άτοπο.

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ



με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

Τότε $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Η υπόθεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}-\vec{\beta}$ γίνεται

$\overrightarrow{O\Gamma} \parallel \overrightarrow{BA}$ που είναι άτοπο

Αντίστροφο

Με υπόθεση $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ θα αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}-\vec{\beta}$

$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta} \parallel \vec{\beta}$,

άρα $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}-\vec{\beta}$

9.

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να βρεθεί σημείο Μ, ώστε

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$
$$= \overrightarrow{B\Delta} - \left(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)$$
$$= \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Delta}$$
$$= \overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Delta B}$$
$$= \overrightarrow{BA}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο Μ είναι το Α

10.

Αν $|\vec{v}| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $\left(1 - |\vec{u}|\right)\left(|\vec{u} + \vec{v}|\right) \leq 1$

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $1 - |\vec{u}| \leq 0$, δηλαδή όταν $|\vec{u}| \geq 1$,
  η αποδεικτέα είναι προφανής, αφού το 1^{o} μέλος είναι ≤ 0 και το $2^{o} \leq 0$
- Όταν $1 - |\vec{u}| > 0$, δηλαδή όταν $|\vec{u}| < 1$,
  Είναι $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \leq |\vec{u}| + 1$
  Άρα $\left(1 - |\vec{u}|\right)\left(|\vec{u} + \vec{v}|\right) \leq \left(1 - |\vec{u}|\right)\left(|\vec{u}| + 1\right) = 1 - |\vec{u}|^2 < 1$