1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ορισμός

Γινόμενο πραγματικού αριθμού λ με διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ λέγεται νέο διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$, που έχει μέτρο $|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\alpha}|$ και είναι

- ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ όταν $\lambda > 0$
- αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ όταν $\lambda < 0$
- $\vec{0}$ όταν $\lambda = 0$
- Τέλος, ορίζουμε $\lambda\vec{0} = \vec{0}$

2.
Ιδιότητες

$\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ επιμεριστική – κοινός παράγοντας ο αριθμός λ

$(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$ επιμεριστική – κοινός παράγοντας το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

$\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$ προσεταιριστική

$\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

$(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$, το (–) περπατάει

$\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$

$(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$

Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$

3.
Γραμμικός συνδυασμός

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ λέγεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

4.
Συνθήκη παραλληλίας

$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (Περιορισμός : $\vec{\beta} \neq \vec{0}$)

5.

Διανυσματική ακτίνα μέσου Μ τμήματος ΑΒ

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Τα συνευθειακά σημεία

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί ότι

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{A\Gamma} \qquad \text{(Α το σημείο αναφοράς)}$$

2.

Συνθήκη μέσου Μ τμήματος ΑΒ

Μ μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (Ο το σημείο αναφοράς)

* Το ευθύ της συνθήκης αναφέρθηκε στη θεωρία.
Ας αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή

αν $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ **(1)** τότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ

Απόδειξη

Έστω Μ΄ το μέσο του ΑΒ .

Από το ευθύ , θα είναι $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ $\Rightarrow$ Μ΄ συμπίπτει Μ.

3.

Από σχέση μέτρων σε σχέση διανυσμάτων

Προσοχή, μόνο όταν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά.

- Όταν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα και $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$
- Όταν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίρροπα και $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = -\lambda\vec{\beta}$

4.

Μια άσκηση σα θεώρημα

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\kappa = \lambda = 0$

Απόδειξη

Έστω ότι ένα τουλάχιστον από τα κ, λ είναι $\neq 0$.

Ας είναι $\kappa \neq 0$

Από την υπόθεση $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$ θα έχουμε

$$\kappa\vec{\alpha} = -\lambda\vec{\beta}$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}$$

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά που είναι άτοπο.

5.

Προσοχή : $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ είναι λάθος. (είναι σωστό όταν $\lambda \neq 0$)

Το σωστό είναι : $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$

$$\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{0}$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0}$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

6.

Προσοχή : $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda = \mu$ είναι λάθος. (είναι σωστό όταν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$)

Το σωστό είναι : $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha} = \vec{0}$

$$(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$\lambda - \mu = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$\lambda = \mu \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο του Μ, ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{1}$. Να βρείτε τη σχέση των διανυσμάτων

i) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$

ii) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$

iii) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 3

i)

$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{1} \Rightarrow AM = \frac{2}{1} MB$

και επειδή τα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ είναι ομόρροπα,

θα είναι $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{1} \overrightarrow{MB}$

ii)

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{MA}{MB+MA} = \frac{2}{1+2}$$

$$\frac{MA}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$AM = \frac{2}{3} AB$$

και επειδή τα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι ομόρροπα, θα είναι

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

iii)

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{MA+MB}{MB} = \frac{2+1}{1}$$

$$\frac{AB}{BM} = 3$$

$$AB = 3BM$$

και επειδή τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM}$ είναι αντίρροπα, θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{BM}$$

2.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στην προέκτασή του προς το Α, σημείο Μ, ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Να βρείτε τη σχέση των διανυσμάτων

i) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$

ii) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$

Σχόλιο 3

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AM = \frac{2}{3} MB$$

και επειδή τα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ είναι αντίρροπα, θα είναι

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

ii)

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MA}{MB-MA} = \frac{2}{3-2}$$

$$\frac{MA}{AB} = \frac{2}{1}$$

$$AM = 2\,AB$$

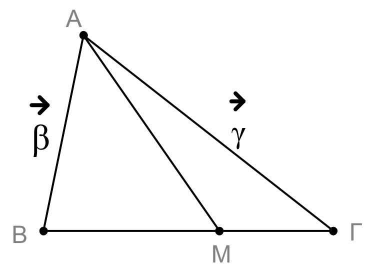
και επειδή τα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίρροπα, θα είναι

$$\overrightarrow{AM} = -2\,\overrightarrow{AB}$$

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma}$. Σημείο Μ χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο 2, δηλαδή είναι $\frac{BM}{M\Gamma} = 2$. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Προτεινόμενη λύση



Καταρχήν είναι $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \vec{\gamma} - \vec{\beta}$

$$\frac{BM}{M\Gamma} = 2 \Rightarrow \frac{BM}{BM+M\Gamma} = \frac{2}{2+1}$$

$$\frac{BM}{B\Gamma} = \frac{2}{3}$$

$$BM = \frac{2}{3}B\Gamma$$

$$|\overrightarrow{BM}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{B\Gamma}|$$

και επειδή $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ ομόρροπα, θα είναι $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma} = \frac{2}{3}(\vec{\gamma} - \vec{\beta})$

Αλλά $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{\beta} + \frac{2}{3}(\vec{\gamma} - \vec{\beta})$

$$= \frac{3\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}}{3}$$

$$= \frac{\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}}{3}$$

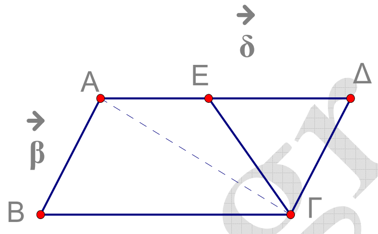
4.

Δίνεται παρ/μμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$. και ΑΒ < ΑΔ. Στην πλευρά ΔΑ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΔΕ = ΔΓ. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma E}$ σα γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α.

$\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AE} - (\vec{\beta} + \vec{\delta})$ **(1)**



$AE = A\Delta - E\Delta = |\vec{\delta}| - \Delta\Gamma = |\vec{\delta}| - |\vec{\beta}|$

Και επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\vec{\delta}$

είναι ομόρροπα, θα είναι $\overrightarrow{AE} = (|\vec{\delta}| - |\vec{\beta}|)\vec{\delta}$

(1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\Gamma E} = (|\vec{\delta}| - |\vec{\beta}|)\vec{\delta} - \vec{\beta} - \vec{\delta}$

$= |\vec{\delta}|\vec{\delta} - |\vec{\beta}|\vec{\delta} - \vec{\beta} - \vec{\delta}$

$= (-1)\,\vec{\beta} + (|\vec{\delta}| - |\vec{\beta}| - 1)\,\vec{\delta}$

5.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΒΚ} = 2\overrightarrow{ΚΓ}$, $\overrightarrow{ΓΛ} = 2\overrightarrow{ΛΑ}$, $\overrightarrow{ΑΜ} = 2\overrightarrow{ΜΒ}$. Να αποδείξτε ότι $\overrightarrow{ΑΚ} + \overrightarrow{ΒΛ} + \overrightarrow{ΓΜ} = \vec{0}$.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α.

$$\overrightarrow{ΒΚ} = 2\overrightarrow{ΚΓ} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΚ} - \overrightarrow{ΑΒ} = 2(\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΚ})$$
$$\overrightarrow{ΑΚ} - \overrightarrow{ΑΒ} = 2\overrightarrow{ΑΓ} - 2\overrightarrow{ΑΚ}$$
$$3\overrightarrow{ΑΚ} = 2\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΒ}$$
$$\overrightarrow{ΑΚ} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΒ}) \quad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{ΓΛ} = 2\overrightarrow{ΛΑ} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΛ} - \overrightarrow{ΑΓ} = -2\overrightarrow{ΑΛ}$$
$$3\overrightarrow{ΑΛ} = \overrightarrow{ΑΓ}$$
$$\overrightarrow{ΑΛ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΓ} \quad \textbf{(2)}$$

$$\overrightarrow{ΑΜ} = 2\overrightarrow{ΜΒ} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΜ} = 2(\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΜ})$$
$$\overrightarrow{ΑΜ} = 2\overrightarrow{ΑΒ} - 2\overrightarrow{ΑΜ}$$
$$3\overrightarrow{ΑΜ} = 2\overrightarrow{ΑΒ}$$
$$\overrightarrow{ΑΜ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ΑΒ} \quad \textbf{(3)}$$

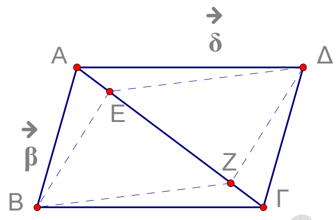
Θα έχουμε $\overrightarrow{ΑΚ} + \overrightarrow{ΒΛ} + \overrightarrow{ΓΜ} = \overrightarrow{ΑΚ} + \overrightarrow{ΑΛ} - \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΑΓ}$

$$= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΒ}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΒ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}$$
$$= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} - 3\overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΑΒ} - 3\overrightarrow{ΑΓ})$$
$$= \frac{1}{3}\vec{0} = \vec{0}$$

6.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{Z\Gamma} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη λύση



Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α.

και τα βασικά διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$.

Τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta}$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} + \vec{\delta}) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{A\Gamma} - \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{3}{4}(\vec{\beta} + \vec{\delta}) \qquad \textbf{(2)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{Z\Delta} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AZ}$$

$$\frac{1}{4}(\vec{\beta} + \vec{\delta}) - \vec{\beta} = \vec{\delta} - \frac{3}{4}(\vec{\beta} + \vec{\delta})$$

$$\vec{\beta} + \vec{\delta} - 4\vec{\beta} = 4\vec{\delta} - 3\vec{\beta} - 3\vec{\delta}$$

$$\vec{0} = \vec{0}$$ που ισχύει

7.

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ με $\overrightarrow{ΑΔ} = 5\overrightarrow{ΒΓ}$. Να βρεθεί αριθμός λ, τέτοιος ώστε να ισχύει $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = λ\overrightarrow{ΒΓ}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α.

$\overrightarrow{ΑΔ} = 5\overrightarrow{ΒΓ} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΔ} = 5(\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΒ}) \Rightarrow \overrightarrow{ΑΔ} = 5\overrightarrow{ΑΓ} - 5\overrightarrow{ΑΒ}$ **(1)**

$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = λ\overrightarrow{ΒΓ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΑΓ} = λ(\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΒ})$

$\overrightarrow{ΑΒ} + 5\overrightarrow{ΑΓ} - 5\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ} = λ\overrightarrow{ΑΓ} - λ\overrightarrow{ΑΒ}$

$\overrightarrow{ΑΒ} + 5\overrightarrow{ΑΓ} - 5\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ} - λ\overrightarrow{ΑΓ} + λ\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{0}$

Σχόλιο 4

$(1 - 5 + λ)\overrightarrow{ΑΒ} + (5 - 1 - λ)\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{0}$

$(λ - 4)\overrightarrow{ΑΒ} + (4 - λ)\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{0}$

$λ - 4 = 0$ και $4 - λ = 0 \Leftrightarrow λ = 4$

8.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, αν ισχύει

$$-\vec{α} + 3\vec{β} - (x - 1)\vec{α} = (3x - y)\vec{β},$$

όπου $\vec{α}, \vec{β}$ μη συγγραμμικά διανύσματα.

Προτεινόμενη λύση

$-\vec{α} + 3\vec{β} - (x - 1)\vec{α} = (3x - y)\vec{β} \Leftrightarrow -\vec{α} + 3\vec{β} - x\vec{α} + \vec{α} = 3x\vec{β} - y\vec{β}$

$-\vec{α} + 3\vec{β} - x\vec{α} + \vec{α} - 3x\vec{β} + y\vec{β} = \vec{0}$

$(-1 - x + 1)\vec{α} + (3 - 3x + y)\vec{β} = \vec{0}$

Σχόλιο 4

$-x\vec{α} + (3 - 3x + y)\vec{β} = \vec{0}$

$-x = 0$ και $3 - 3x + y = 0$

$x = 0$ και $3 - 3\cdot 0 + y = 0$

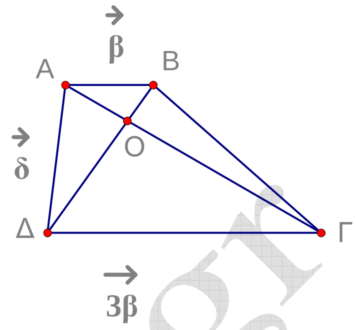
$x = 0$ και $y = -3$

9.

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 3\vec{\beta}$. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta O}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$.

Προτεινόμενη λύση

Από τις υποθέσεις παίρνουμε



$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 3\,\overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; \Delta\Gamma \parallel AB$

Τρίγωνο ΟΔΓ όμοιο του ΟΒΑ

$$\frac{O\Delta}{OB} = \frac{\Delta\Gamma}{AB} = \frac{|3\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|} = \frac{3|\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{O\Delta}{O\Delta + OB} = \frac{3}{3+1}$$

$$\frac{O\Delta}{\Delta B} = \frac{3}{4}$$

$$\Delta O = \frac{3}{4}\Delta B$$

$$\overrightarrow{\Delta O} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\Delta B} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta}) = \frac{3}{4}(\vec{\beta} - \vec{\delta})$$

10.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά, να αποδείξετε ότι

i) $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \neq \vec{0}$

ii) τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = -3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά.

Προτεινόμενη λύση

Απαγωγή σε άτοπο

i)

Έστω $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = \vec{0}$

Τότε $2\vec{\alpha} = 3\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{3}{2}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά, που είναι άτοπο.

ii)

Έστω ότι τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι συγγραμμικά.

Τότε $\vec{u} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \lambda(-3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = -3\lambda\vec{\alpha} + 4\lambda\vec{\beta}$$

$$\vec{\alpha} + 3\lambda\vec{\alpha} = 4\lambda\vec{\beta} - 2\vec{\beta}$$

$$(1 + 3\lambda)\,\vec{\alpha} = (4\lambda - 2)\,\vec{\beta} \quad \textbf{(1)}$$

- Όταν $1 + 3\lambda = 0$, δηλαδή όταν $\lambda = -\frac{1}{3}$

  Η (1) γίνεται $0 \cdot \vec{\alpha} = \left[4\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\right]\vec{\beta}$

  $$\vec{0} = \left(-\frac{4}{3} - 2\right)\vec{\beta}$$

  $$\vec{0} = -\frac{10}{3}\vec{\beta}$$

  $\vec{\beta} = \vec{0}$, που είναι άτοπο, αφού δεν είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$

- Όταν $1 + 3\lambda \neq 0$, δηλαδή όταν $\lambda \neq -\frac{1}{3}$

  Η (1) γίνεται $\vec{\alpha} = \frac{4\lambda - 2}{1 + 3\lambda}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά, που είναι άτοπο.