1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Άξονας $(O, \vec{i})$

λέγεται κάθε ευθεία εφοδιασμένη με αρχή O και μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$.

2.

Τετμημένη σημείου M που ανήκει σε άξονα $(O, \vec{i})$

λέγεται ο αριθμός x, για τον οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$

Σημείωση. Κάθε σημείο του άξονα έχει μοναδική τετμημένη.

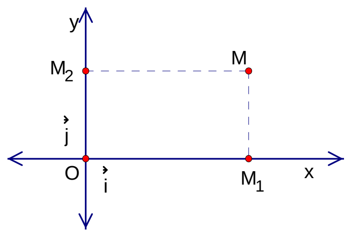
3.

Σύστημα συντεταγμένων ή καρτεσιανό επίπεδο (Oxy)

λέγεται ζευγάρι αξόνων $x'x$, $y'y$ με κοινή αρχή O.

4.

Συντεταγμένες σημείου



M_1, M_2 οι προβολές σημείου M στους άξονες.

Το M_1, αφού είναι σημείο του άξονα $x'x$,

έχει τετμημένη έστω x.

Το M_2, αφού είναι σημείο του άξονα $y'y$,

έχει τετμημένη έστω y.

Τετμημένη του σημείου M λέγεται η τετμημένη x του M_1.

Τεταγμένη του σημείου M λέγεται η τετμημένη y του M_2.

Συντεταγμένες του σημείου M λέγεται το διατεταγμένο ζευγάρι (x, y)

5.

Συντεταγμένες διανύσματος

Έστω διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

Συντεταγμένες του $\overrightarrow{OA}$ λέγονται οι συντεταγμένες του πέρατός του A.

Προσοχή : Η αρχή του διανύσματος συμπίπτει με την αρχή των αξόνων.

Αν όχι, τότε μεταφέρουμε το διάνυσμα παράλληλα στον εαυτό του.

6.

Θεώρημα

Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$, $\vec{j}$ **:**

$$\vec{\alpha} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}, \quad \text{όπου } x,\ y \text{ οι συντεταγμένες του } \vec{\alpha}$$

7.

Ιδιότητες

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ άρα και $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

ii) $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1)$ άρα και $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1,\ \lambda y_1)$

iii) $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2)$ άρα και

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2)$$

8.

Συντεταγμένες μέσου τμήματος

ως συνάρτηση των συντεταγμένων των άκρων του **:** $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

9.

Συντεταγμένες διανύσματος

ως συνάρτηση των συντεταγμένων των άκρων του **:** $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$

10.

Μέτρο διανύσματος

ως συνάρτηση των συντεταγμένων του **:** $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

11.

Απόσταση δύο σημείων

ως συνάρτηση των συντεταγμένων τους **:** $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

12.

Η γωνία $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OA},\ x'x})$, με $0 \le \varphi\ 2\pi$

Σχηματίζεται από την περιστροφή του θετικού ημιάξονα Ox κατά θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA.

13.

Ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$ με $x \neq 0$ **:**

$$\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\varphi$$

14.

Συνθήκες παραλληλίας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

i) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

ii) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

iii) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$, με $x_1 x_2 \neq 0$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Παρατήρηση

Η καθιέρωση των συντεταγμένων αντικαθιστά τα διανύσματα με ζευγάρια αριθμών. Έτσι, ο λογισμός των διανυσμάτων γίνεται ευκολότερος.

2.

Παρατήρηση

Όταν ένα διάνυσμα έχει αρχή την αρχή των αξόνων, τότε οι συντεταγμένες του συμπίπτουν με τις συντεταγμένες του πέρατός του.

3.

Τα κατακόρυφα και τα οριζόντια διανύσματα

Τα διανύσματα της μορφής (0, y) είναι κατακόρυφα $(\parallel y'y)$

Τα διανύσματα της μορφής (x, 0) είναι οριζόντια $(\parallel x'x)$

4.

Παρατήρηση

Τα κατακόρυφα διανύσματα δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

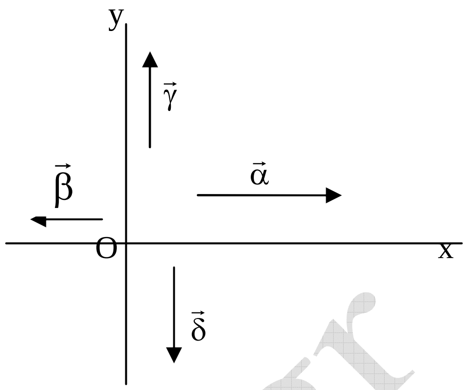
1.

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ // $x'x$ και $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ // $y'y$ απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα

i) ποια είναι η μορφή των συντεταγμένων τους

ii) ποια είναι η γωνία φ, που το καθένα τους σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

iii) αν έχουν συντελεστή διεύθυνσης, ποιος είναι;



Απάντηση

i)

$\vec{\alpha} = (x,\ 0)$ $\quad$ $\vec{\beta} = (x,\ 0)$ $\quad$ $\vec{\gamma} = (0,\ y)$ $\quad$ $\vec{\delta} = (0,\ y)$

ii)

$\varphi_{\vec{\alpha}} = 0$ $\quad$ $\varphi_{\vec{\beta}} = \pi$ $\quad$ $\varphi_{\vec{\gamma}} = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\varphi_{\vec{\delta}} = \frac{3\pi}{2}$

iii)

$\lambda_{\vec{\alpha}} = 0$ $\quad$ $\lambda_{\vec{\beta}} = 0$ $\quad$ δεν έχει $\quad$ δεν έχει

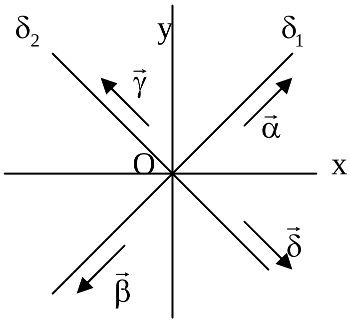
2.

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ // στη διχοτόμο δ_1 και $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ // στη διχοτόμο δ_2, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα

i) ποια είναι η μορφή των συντεταγμένων τους

ii) ποια είναι η γωνία φ, που το καθένα τους σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

iii) αν έχουν συντελεστή διεύθυνσης, ποιος είναι;



Απάντηση

i)

$\vec{\alpha} = (x,\ x)$ $\quad$ $\vec{\beta} = (x,\ x)$ $\quad$ $\vec{\gamma} = (x,\ -x)$ $\quad$ $\vec{\delta} = (x,\ -x)$

ii)

$\varphi_{\vec{\alpha}} = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\varphi_{\vec{\beta}} = \frac{5\pi}{4}$ $\quad$ $\varphi_{\vec{\gamma}} = \frac{3\pi}{4}$ $\quad$ $\varphi_{\vec{\delta}} = \frac{7\pi}{4}$

iii)

$\lambda_{\vec{\alpha}} = 1$ $\quad$ $\lambda_{\vec{\beta}} = 1$ $\quad$ $\lambda_{\vec{\gamma}} = -1$ $\quad$ $\lambda_{\vec{\delta}} = -1$

3.

Αν $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 3\vec{i} - \vec{j}$ και ισχύει $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$.

Προτεινόμενη λύση

$$\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$$

$$\vec{\gamma} = -(2\vec{i} + 2\vec{j}) - (3\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{\gamma} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = -5\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{\gamma} = (-5, -1)$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

4.

Δίνονται τα σημεία Α(1, –3), Β(4, 0). Να καθορισθούν συντεταγμένες σημείου Γ ώστε αυτό να ανήκει στην ευθεία ΑΒ.

Προτεινόμενη λύση

Έστω Γ(x, y) το ζητούμενο σημείο.

Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ $\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{A\Gamma}} & y_{\overrightarrow{A\Gamma}} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} \end{vmatrix} = 0$ **(1)**

Αλλά $x_{\overrightarrow{A\Gamma}} = x_\Gamma - x_A = x - 1$, $y_{\overrightarrow{A\Gamma}} = y_\Gamma - y_A = y - (-3) = y + 3$

$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4 - 1 = 3$, $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 0 - (-3) = 3$

Η (1) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) - 3(y+3) = 0$

$(x - 1) - (y + 3) = 0$

$x - 1 - y - 3 = 0$

$x = y + 4$ **(2)**

Για να έχουμε ένα συγκεκριμένο σημείο Γ, στη (2) θέτουμε μια τιμή στο y, ας είναι y = 1, οπότε x = 5.
Άρα το σημείο Γ(5, 1) είναι ζητούμενο.

5.

Να βρείτε τα α, β ώστε να ισχύει

$(\alpha - 3)\,\vec{i} - (\beta + 1)\,\vec{j} \,//\, y'y$ και $(\alpha + 1)\,\vec{i} + 2\beta\,\vec{j} \,//\, \vec{i} + \vec{j}$

Προτεινόμενη λύση

$(\alpha - 3)\,\vec{i} - (\beta + 1)\,\vec{j} \,//\, y'y \;\Leftrightarrow\; \alpha - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 3$ **(1)**

$(\alpha + 1)\,\vec{i} + 2\beta\,\vec{j} \,//\, \vec{i} + \vec{j} \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2\beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\alpha + 1 - 2\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha - 2\beta = -1$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\alpha = 3$ και $\beta = 2$

6.

Σημειώστε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Τα διανύσματα (3, –1), (–3, 1) είναι αντίθετα

ii Ισχύει $\det(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0$

iii Ισχύει $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$

iv Αν η τεταγμένη του μη μηδενικού διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ίση με το μισό του μέτρου του, τότε η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι $\frac{\pi}{6}$

v Αν ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $\frac{3}{4}$ τότε $\vec{\alpha} = (4, 3)$

Απάντηση

(Για την κατανόηση θα δικαιολογήσουμε την κάθε απάντηση)

i → Σ $(3, -1) = -(-3, 1)$

ii → Σ $\vec{\alpha} \parallel \vec{\alpha}$

iii → Σ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

iv → Λ Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = x^2 + y^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + \left(\frac{|\vec{\alpha}|}{2}\right)^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + \frac{|\vec{\alpha}|^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}|\vec{\alpha}|^2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} = \; \ldots\ldots = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{δύο τιμές}$$

iv → Λ Μπορεί να είναι $\vec{\alpha} = ((4\kappa, 3\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$

7.

Αν $\vec{\alpha} = (-1,\ 3)$, $\vec{\beta} = (0,\ 4)$ και $\vec{\gamma} = (3,\ 1)$, να εκφράσετε το $\vec{\alpha}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$ **(1)**

$\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow (-1,\ 3) = \kappa\,(0,\ 4) + \lambda\,(3,\ 1)$

$(-1,\ 3) = (0,\ 4\kappa) + (3\lambda,\ \lambda)$

$(-1,\ 3) = (0 + 3\lambda,\ 4\kappa + \lambda)$

$-1 = 3\lambda$ και $3 = 4\kappa + \lambda$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ και $3 = 4\kappa - \frac{1}{3}$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ και $3 + \frac{1}{3} = 4\kappa$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ και $\frac{10}{3} = 4\kappa$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ και $\frac{5}{6} = \kappa$

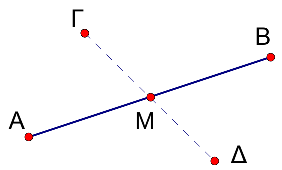
Η (1) γίνεται $\vec{\alpha} = \frac{5}{6}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\gamma}$

8.

Δίνονται τα σημεία Α(1, 4), Β(–1, 6), Γ(7, 0). Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Γ, ως προς κέντρο συμμετρίας το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Προτεινόμενη λύση

Έστω Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.



Τότε $x_M = \frac{1-1}{2} = 0$ και $y_M = \frac{4+6}{2} = 5$.

Έστω Δ το συμμετρικό του Γ ως προς κέντρο συμμετρίας το Μ.

Το Μ θα είναι μέσο του τμήματος ΓΔ, οπότε

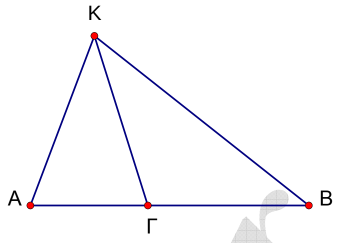
$x_M = \frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2}$ και $y_M = \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2} = 5 \Rightarrow$

$0 = \frac{7 + x_\Delta}{2}$ και $5 = \frac{0 + y_\Delta}{2} \Rightarrow x_\Delta = -7$ και $y_\Delta = 10$

9.

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{KA} = (2, 5)$, $\overrightarrow{KB} = (-1, 3)$ και για το σημείο Γ δίνεται ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma B}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{K\Gamma}$.

Προτεινόμενη λύση



$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma B} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A\Gamma} \,//\, \overrightarrow{\Gamma B}$

$\Rightarrow$ τα Α, Γ, Β είναι συνευθειακά

και $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KA})$$

$$= \frac{2}{5}[(-1, 3) - (2, 5)]$$

$$= \frac{2}{5}(-1 - 2\,,\ 3 - 5)$$

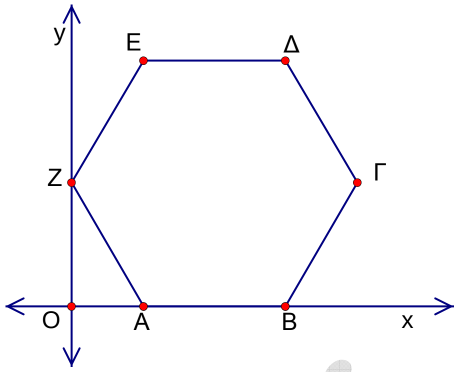
$$= \frac{2}{5}(-3\,,\ -2) = \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Gamma} = (2, 5) + \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

$$= \left(2 - \frac{6}{5},\ 5 - \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5},\ \frac{21}{5}\right)$$

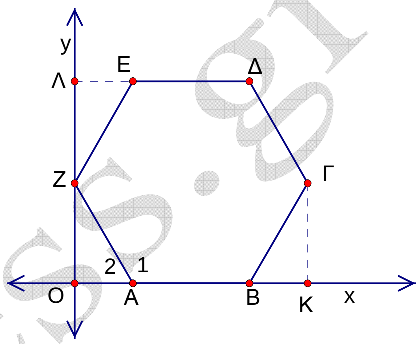
10.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο πλευράς 2.
Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που ορίζουν οι πλευρές του κανονικού εξαγώνου, με τη φορά που εσείς θέλετε.



Προτεινόμενη λύση

Πρώτα βρίσκουμε τις συντεταγμένες των κορυφών



$\hat{A}_1 = 120^o \Rightarrow \hat{A}_2 = 60^o \Rightarrow \hat{Z} = 30^o$

άρα $OA = \frac{ZA}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow A(1,\ 0)$

Πυθαγόρειο στο τρ. ΟΑΖ **:**

$OZ^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow OZ = \sqrt{3} \Rightarrow Z(0,\ \sqrt{3})$

Φέρουμε $ΓΚ \perp Ox$, $ΕΛ \perp Oy$ και
εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο στα τρίγωνα ΚΒΓ, ΛΕΖ.

Οπότε $BK = 1$ και $ΛΕ = 1$

Επομένως $OB = OA + AB = 1 + 2 = 3 \Rightarrow B(3,\ 0)$

$OK = 4 \Rightarrow Γ(4,\ \sqrt{3})$

$OΛ = 2\sqrt{3} \Rightarrow E(1,\ 2\sqrt{3})$

$Δ(3,\ 2\sqrt{3})$

$x_{\overline{AB}} = x_B - x_A = 3 - 1 = 2, \qquad y_{\overline{AB}} = 0$

$x_{\overline{BΓ}} = x_Γ - x_B = 4 - 3 = 1, \qquad y_{\overline{BΓ}} = y_Γ - y_B = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$ κ.λ.π