1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό :

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})$ αν $\vec{\alpha}\neq 0$ και $\vec{\beta}\neq 0$
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ αν $\vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=0$

2.

Ιδιότητες

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ (ομόρροπα), τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ (αντίρροπα), τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}= -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως
- $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\,\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2$
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ και $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$
- Αν $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$
- $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta})$ (ο πραγματικός αριθμός λ περπατάει)
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ (εφόσον $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ $\nparallel$ $y'y$)
- $\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$
- Αν $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$, τότε $\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Επισήμανση

Τονίζουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι αριθμός και όχι διάνυσμα.

2.

Επισήμανση

Δεν έχει νόημα η γραφή $\vec{\alpha}\,\vec{\beta}\,\vec{\gamma}$.

Μπορούμε βέβαια να γράφουμε $(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})\vec{\gamma}$, αφού πρόκειται για γινόμενο του αριθμού $(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})$ επί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, δηλαδή πρόκειται για διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\gamma}$.

3.

Επισήμανση

Δε μπορούμε να γράφουμε $\vec{\alpha}^3$, $\vec{\alpha}^4$ κ.λ.π

Μπορούμε βέβαια να γράφουμε $|\vec{\alpha}|^3$, $|\vec{\alpha}|^4$ κ.λ.π, αφού πρόκειται για αριθμούς.

4.

Ισχύουν οι ταυτότητες

α) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2(\vec{\alpha}\,\vec{\beta}) + \vec{\beta}^2$

β) $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2(\vec{\alpha}\,\vec{\beta}) + \vec{\beta}^2$

γ) $\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

5.

Προσοχή στο λάθος : Αν $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$

Το σωστό είναι : Αν $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

6.

Προσοχή

Είναι προφανές ότι, αν $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\vec{\gamma}$ όχι όμως αντίστροφα.

Στο αντίστροφο μπορούμε να έχουμε:

i) $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = |\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$

ii) $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha}\,\vec{\beta} - \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = 0$

$\vec{\alpha}(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0$

$\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ ή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

7.

Προσοχή στα λάθη $|\vec{\alpha}.\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$, $(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$

Τα σωστά είναι $|\vec{\alpha}.\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\left|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|$

και $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 = \left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right)^2$

8.

Προσοχή στο λάθος $\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}\,\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\,\vec{\beta})\,\vec{\gamma}$

9.

Μέθοδος

Αν θέλω να αποδείξω ότι δύο διανύσματα είναι κάθετα, αποδεικνύω ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0

10.

Μέθοδος

Αν έχω γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων, επιχειρώ ύψωση στο τετράγωνο.

11.

Εσ. γινόμενο με προβολή

$\vec{\alpha}\,\vec{v}$ = με το ένα επί την προβολή του άλλου στο πρώτο

$\vec{\alpha}\,\vec{v} = \vec{\alpha}\,.\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \vec{v}\,.\,\text{προβ}_{\vec{v}}\vec{\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(3\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$, $|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}|$

Προτεινόμενη λύση

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = 1\cdot 2\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$
- $(3\vec{\alpha})\vec{\beta} = 3(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = 3\cdot 1 = 3$
- $|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}| = |1\cdot\vec{\alpha}| = |1|\cdot|\vec{\alpha}| = 1\cdot 1 = 1$

2 .

Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$ και $\vec{\kappa}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{\nu}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

i) Να βρείτε τα $|\vec{\kappa}|$ και $|\vec{\nu}|$

ii) Να βρείτε το $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}$

iii) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\kappa}$ και $\vec{\nu}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 10, 4

i)

$$
\begin{aligned}
|\vec{\kappa}|^2 = |2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2 &= (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2 \\
&= 4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2 \\
&= 4|\vec{\alpha}|^2+12|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+9|\vec{\beta}|^2 \\
&= 4+12\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+9\cdot4=52
\end{aligned}
$$

Οπότε : $|\vec{\kappa}|=\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

Ομοίως βρίσκουμε $|\vec{\nu}|=\sqrt{13}$

ii)

$\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-6\vec{\beta}^2=\text{πράξεις}=-23$

iii)

$$
\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\kappa},\vec{\nu}}) = \frac{\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}}{|\vec{\kappa}|\cdot|\vec{\nu}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{23}{26}
$$

3.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,\ 2)$, $\vec{\beta} = (0,\ -1)$ και $\vec{\gamma} = (-2,\ 0)$.
Να υπολογίσετε τα

i) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$, $\quad (\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\,\vec{\alpha}$, $\quad (3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})2\vec{\alpha}$

ii) $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}|$, $\quad |(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}|$, $\quad |\vec{\gamma}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$, $\quad |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\cdot\vec{\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

i)

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (1,\ 2)\cdot(0,\ -1) = 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) = -2$

  Οπότε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma} = -2(-2,\ 0) = (4,\ 0)$

- $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = (0,\ -1)\cdot(-2,\ 0) = 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 = 0$

  Οπότε $(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\,\vec{\alpha} = 0\cdot(1,\ 2) = (0,\ 0) = \vec{0}$

- $(3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})2\vec{\alpha} = 3\cdot 2\,[\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})] = 6\cdot\vec{0} = \vec{0}$

ii)

- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow |\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}| = 0$

  Άρα $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}| = \sqrt{5}\cdot 0 = 0$

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = (1,2)\cdot(-2,0) = 1\cdot(-2) + 2\cdot 0 = -2$

  $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta} = -2\vec{\beta} = -2(0,\ -1) = (0,\ 2)$

  Άρα $|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

- $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$ και αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2$, θα έχουμε

  $|\vec{\gamma}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = 2\cdot(-2) = -4$

- $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\cdot\vec{\gamma} = |-2|\cdot(-2,\ 0) = 2(-2,\ 0) = (-4,\ 0)$

4.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = 60^0$, να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

i) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2$

ii) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta})$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\vec{\alpha}^2 + (3-2x)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x\vec{\beta}^2 = -2$$

$$2|\vec{\alpha}|^2 + (3-2x)|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) - 3x|\vec{\beta}|^2 = -2$$

$$2\cdot 2^2 + (3-2x)2\cdot 3\sigma\upsilon\nu 60^0 - 3x3^2 = -2$$

$$8 + (3-2x)\cdot 3 - 27x = -2$$

$$8 + 9 - 6x - 27x = -2$$

$$33x = 19 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{19}{33}$$

ii)

$$(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 0$$

$$2\vec{\alpha}^2 - 2x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 3(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x\vec{\beta}^2 = 0$$

$$2\cdot 2^2 - 2x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 3(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x\cdot 3^2 = 0$$

$$8 - 2x\cdot 3 + 3\cdot 3 - 3x\cdot 9 = 0$$

$$-33x = -17 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{17}{33}$$

5.

Αν $|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρείτε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Σχόλιο 10

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -4\vec{\gamma}$$

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (-4\vec{\gamma})^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 16\vec{\gamma}^2$$

$$9 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 1 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} + 4\vec{\gamma} = -\vec{\beta}$$

$(\vec{\alpha} + 4\vec{\gamma})^2 = \vec{\beta}^2$ Ομοίως βρίσκουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = -3$

και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -1$

6.

Αν ισχύουν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, δείξτε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 10

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2$$

$$2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \vec{\beta}^2 = 0$$

$$2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = -|\vec{\beta}|^2, \quad \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha} \quad |\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2}$$

οπότε

$$2\,\frac{|\vec{\beta}|}{2}\,|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = -|\vec{\beta}|^2$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = -1 \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 180^0 \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$$

7.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\gamma}| = \frac{1}{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{4}$ με $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 8

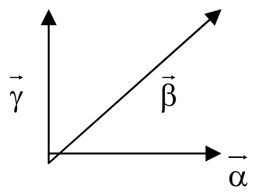
$$|\vec{v}|^2 = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2$$

$$= 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 - 12(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}) - 6(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = 2\cdot\frac{1}{2}\ \sigma\upsilon\nu 90^o = 0$

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$



$$(1) \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 4\cdot 2^2 + 9\cdot\sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\cdot 2 + 4\cdot 0 - 6\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 16 + 18 + \frac{1}{4} - 24 - 3 = \frac{29}{4} \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

8.

Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρείτε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

$$\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 + 2(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$$

$$4 = 4 + 4 + 2(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -2$$

Ομοίως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2$

9.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρο ίσο με 1 και τα διανύσματα $\vec{\kappa} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{\nu} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 5

$$\vec{\kappa} \perp \vec{\nu} \Leftrightarrow \vec{\kappa}\cdot\vec{\nu} = 0$$

$$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = 0$$

$$5\vec{\alpha}^2 + 6(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 8\vec{\beta}^2 = 0$$

$$5|\vec{\alpha}|^2 + 6|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) - 8|\vec{\beta}|^2 = 0$$

$$5\cdot 1 + 6\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) - 8\cdot 1 = 0$$

$$6\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 3$$

$$\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60^\circ$$

10.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα , δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα διανύσματα $\vec{\kappa} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$, $\vec{\nu} = \mu\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

$\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu} = (\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})(\mu\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}) = \lambda\mu\vec{\alpha}^2 - \lambda^2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \mu^2\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} - \lambda\mu\vec{\beta}^2$ **(1)**

Όμως $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu} = \lambda\mu|\vec{\alpha}|^2 - \lambda\mu|\vec{\beta}|^2$

$= \lambda\mu|\vec{\alpha}|^2 - \lambda\mu|\vec{\alpha}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{\kappa} \perp \vec{\nu}$.

Σχόλιο 8

$|\vec{\kappa}|^2 = |\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}|^2 = (\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})^2 =$

$= \lambda^2\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu^2\vec{\beta}^2 =$

$= \lambda^2|\vec{\alpha}|^2 + \mu^2|\vec{\beta}|^2 =$

$= \lambda^2|\vec{\alpha}|^2 + \mu^2|\vec{\alpha}|^2$ **(2)**

Ομοίως βρίσκουμε ότι $|\vec{\nu}|^2 = \lambda^2|\vec{\alpha}|^2 + \mu^2|\vec{\alpha}|^2$ **(3)**

Από τις (2), (3) $\Rightarrow$ $|\vec{\kappa}| = |\vec{\nu}|$

11.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = \dfrac{|\vec{\gamma}|}{2}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 9

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = 0$

$\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ **(1)**

Σχόλιο 10

$\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = \vec{\gamma}^2$

$\vec{\alpha}^2 + 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2$

$4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = \vec{\gamma}^2 - \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\beta}^2$

$4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = 4|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\alpha}|^2$

$4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = -|\vec{\alpha}|^2$

$4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + |\vec{\alpha}|^2 = 0$ αποδείχθηκε η (1)

12.

Αν για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2$,
δείξτε ότι τα διανύσματα είναι ίσα

Προτεινόμενη λύση

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=2$

$$1\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + 1\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = 2$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = 2$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=1$$

$$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=0$$

$$\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$$

και επειδή τα μέτρα τους είναι ίσα με (με 1), θα είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

13.

Δίνονται τα κάθετα και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έτσι ώστε $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|$
Να βρείτε, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ έτσι, ώστε να είναι $\vec{x}\parallel(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $\vec{y}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $\vec{x}-\vec{y}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

$\vec{x}\parallel(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \quad\Leftrightarrow\quad \vec{x}=\lambda(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta} \quad \textbf{(1)}$$

Θυμήσου τη συνθήκη παραλληλίας

$\vec{x}-\vec{y}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}-\vec{y}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

$$\vec{y}=\lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}. \quad \textbf{(2)}$$

$\vec{y}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (\lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0$

$$\lambda\vec{\alpha}^2-\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-3\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+3\lambda\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-2\vec{\beta}^2=0 \quad \textbf{(3)}$$

Από υπόθεση έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}| \quad\Rightarrow\quad \vec{\alpha}^2=4\vec{\beta}^2$.

Επομένως η (3) $\Leftrightarrow$ $4\lambda\vec{\beta}^2+3\lambda\vec{\beta}^2-4\vec{\beta}^2-2\vec{\beta}^2=0$

$$7\lambda\vec{\beta}^2-6\vec{\beta}^2=0$$

$(7\lambda-6)\vec{\beta}^2=0$ και αφού $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, θα είναι

$$7\lambda-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{6}{7}$$

Οπότε η υπόθεση $\vec{x}=\lambda(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \quad\Leftrightarrow\quad \vec{x}=\frac{6}{7}(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$

και η (2) $\Leftrightarrow$ $\vec{y}=\frac{6}{7}\vec{\alpha}-\frac{18}{7}\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=-\frac{1}{7}\vec{\alpha}-\frac{4}{7}\vec{\beta}$

14.

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta}) = 60^{o}$, $|\vec{\nu}| = 3$ και $(\vec{\nu}\hat{,}\vec{\alpha}) = 60^{0}$

να αναλύσετε το $\vec{\nu}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 6

Έστω $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ **(1)** $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}.\vec{\nu} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha}^2 + \mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\nu}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda|\vec{\alpha}|^2 + \mu|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta})$$

$$1\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu 60^0 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 1\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu 60^0$$

$$3\cdot\frac{1}{2} = \lambda + \mu\cdot\frac{1}{2}$$

$$3 = 2\lambda + \mu \quad \textbf{(2)}$$

$\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ $\Rightarrow$ $\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} = \vec{\beta}(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

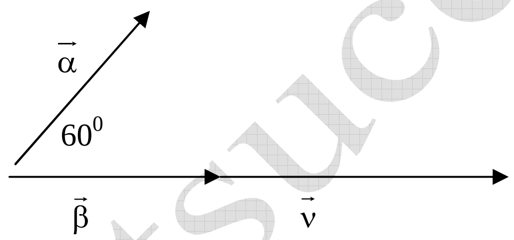
$$\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu\vec{\beta}^2$$

$$|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\nu}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta}) + \mu|\vec{\beta}|^2$$

$$1\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu 60^0 + \mu\cdot 1$$

$$3\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda\cdot\frac{1}{2} + \mu \quad \textbf{(3)}$$

- Όταν η γωνία των $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ είναι 0^0

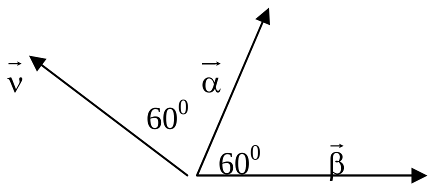


Η (3) γίνεται $3\,\sigma\upsilon\nu\,0^0 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ $\Rightarrow$ $3 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ **(4)**.

Λύνοντας το σύστημα των (2), (4) βρίσκουμε $\lambda = 0$ και $\mu = 3$.

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\nu} = 0\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

- Όταν η γωνία των $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ είναι 120^0



Η (3) γίνεται $3\,\sigma\upsilon\nu 120^0 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ $\Rightarrow$ $3(-\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2} + \mu$ **(5)**

Λύνοντας το σύστημα των (2), (5) βρίσκουμε $\mu = -3$ και $\lambda = 3$

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\nu} = 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

15.

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ μη μηδενικά διανύσματα έτσι ώστε να ισχύουν

$\vec{\beta} \perp \vec{x}$, $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2$, $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{x} + 1 = 0$, $\quad |\vec{\alpha}| = 1$, $\quad |\vec{x}| = 2$

i) Να εξετάσετε αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά

ii) Να βρείτε το $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ήταν συγγραμμικά, επειδή $\vec{\beta} \perp \vec{x}$ θα ήταν και $\vec{\alpha} \perp \vec{x}$,

οπότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{x} = 0$, άρα η υπόθεση $\vec{\alpha}\cdot\vec{x} + 1 = 0$ θα έδινε $1 = 0$, που είναι άτοπο.

Επομένως τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

ii)

Έστω $\vec{x} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \;\Rightarrow\; \vec{\alpha}\cdot\vec{x} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{x} = \lambda\vec{\alpha}^2 + \mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$-1 = \lambda + 2\mu \qquad \textbf{(1)}$$

Σχόλιο 6

$\vec{x} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \;\Rightarrow\; \vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{x}^2 = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}) + \mu(\vec{\beta}\cdot\vec{x})$$

$$4 = \lambda(-1) + \mu\cdot 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -4 \qquad \textbf{(2)}$$

Σχόλιο 6

Η (1) $\;\Rightarrow\; -1 = -4 + 2\mu \;\Rightarrow\; \mu = \dfrac{3}{2}$

Άρα $\vec{x} = -4\vec{\alpha} + \dfrac{3}{2}\vec{\beta}$

16.

Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και λ πραγματικός αριθμός έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ και $|\vec{\gamma}|=1$. Δείξτε ότι $|\vec{\alpha}|\,\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \le 1$.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 10

Σχόλιο 4

$$\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{\gamma} \quad \Rightarrow \quad (\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})^2=\vec{\gamma}^2$$

$$\vec{\alpha}^2+\lambda^2\vec{\beta}^2+2\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=\vec{\gamma}^2$$

$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).\lambda+|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\gamma}|^2=0$$

$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\lambda+|\vec{\alpha}|^2-1=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ, η οποία γνωρίζουμε από την υπόθεση πως έχει λύση, άρα $\Delta \ge 0 \quad \Rightarrow$

Σχόλιο 7

$$4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2-4|\vec{\beta}|^2\left(|\vec{\alpha}|^2-1\right) \ge 0$$

Είναι $\vec{\beta} \ne \vec{0}$, αφού $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικό $\vec{\alpha}$

$$4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\beta}|^2 \ge 0$$

$$|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-|\vec{\alpha}|^2+1\ge 0$$

$$1-|\vec{\alpha}|^2\left(1-\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right)\ge 0$$

$$1-|\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\ge 0$$

$$|\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\le 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{\alpha}|\,\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \le 1$$

17.

Αν $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}$, δείξτε ότι $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$.

Προτεινόμενη λύση

$|\vec{\beta}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1 \Leftrightarrow$

$$|\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})-1$$

$$|\vec{\beta}|^2-2\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})|\vec{\beta}|+1=0 \quad \textbf{(1)}$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς $|\vec{\beta}|$, η οποία έχει λύση αφού

$|\vec{\beta}|\in\mathbb{R}$, άρα $\Delta\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 4\text{συν}^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})-4\geq 0$

$$\text{συν}^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})-1\geq 0$$

$$-\text{ημ}^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})\geq 0$$

$$\text{ημ}^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=0$$

$$\text{ημ}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=0 \quad\Rightarrow\quad \text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=\pm 1$$

- Για $\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=1$, δηλαδή $(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=0^{\circ}$ επομένως $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

  η (1) γίνεται $|\vec{\beta}|^2-2\cdot|\vec{\beta}|+1=0$

  $$\left(|\vec{\beta}|-1\right)^2=0$$

  $$|\vec{\beta}|-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad |\vec{\beta}|=1$$

  Αφού $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, θα υπάρχει $\lambda>0$ ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta} \quad\Rightarrow$

  $$|\vec{\alpha}|=|\lambda|\,|\vec{\beta}|$$

  $$2=|\lambda|.\,1 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=2$$

  οπότε $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$

- Για $\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=-1$, δηλαδή $(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta})=180^{\circ}$ επομένως $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$,

  Ομοίως συμπεραίνουμε $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$

18.

i) Δείξτε ότι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και εξετάστε πότε ισχύει η ισότητα.

ii) Έστω $\vec{\alpha} = (x,\ y)$, $\vec{\beta} = (3,\ 4)$, $x^2 + y^2 = 49$ και $A = 3x + 4y$
Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α, καθώς επίσης και τις τιμές των x και y για τις οποίες προκύπτουν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή .

Προτεινόμενη λύση

i)

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = \left|\ |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})\ \right|$$

$$= |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|\ \left|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})\,\right| \le |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|\cdot 1 = |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|$$

- Όταν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, είναι προφανές ότι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- Όταν $\vec{\alpha} \ne \vec{0}$ και $\vec{\beta} \ne \vec{0}$,

για να είναι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \quad \Leftrightarrow$

$$\left|\ |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})\ \right| = |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|$$

$$|\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|\ \left|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})\,\right| = |\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|$$

$$\left|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})\,\right| = 1$$

$$\text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = 1 \quad \text{ή} \quad \text{συν}(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = -1$$

$$(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = 0 \quad \text{ή} \quad (\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = 180^o$$

$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα ή αντίρροπα

ii)

Παρατηρούμε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3x + 4y$, άρα $A = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \quad \Rightarrow$

$$|A| = |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$$

$$|A| \le |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \qquad \mathbf{(1)}$$

Αλλά $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{9+16} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{25} = 7\cdot 5 = 35$

Η (1) $\Rightarrow$ $|A| \le 35$

$-35 \le A \le 35$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή της Α είναι 35 και η ελάχιστη –35

Το ίσον όπως είδαμε ισχύει όταν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά,

δηλαδή όταν $(x, y) = \lambda(3, 4)$

$(x, y) = (3\lambda, 4\lambda)$

$x = 3\lambda$ και $y = 4\lambda$ **(2)**

και επειδή $x^2 + y^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad 9\lambda^2 + 16\lambda^2 = 49$

$25\lambda^2 = 49$

$$\lambda^2 = \frac{49}{25} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{7}{5}$$

Οι (2) γίνονται $x = 3(\pm\frac{7}{5}) = \pm\frac{21}{5}$ και $\psi = 4(\pm\frac{7}{5}) = \pm\frac{28}{5}$

19.

Αν $\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \neq -1$

i) να δείξτε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{x} = \dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$

ii) να βρείτε το $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Σχόλιο 6

$\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow [\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}]\cdot\vec{\alpha} = \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

$\vec{x}\cdot\vec{\alpha} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}) = \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

$(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})[1+(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})] = \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$ και αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \neq -1$

$\vec{x}\cdot\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$

ii)

Η υπόθεση $\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με βάση το (i) γίνεται $\vec{x} + \dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma}$

$\vec{x} = \vec{\gamma} - \dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\cdot\vec{\beta}$

20.

Έστω $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} = \vec{v} + \vec{u}$. Αν $\vec{v} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{u} \perp \vec{\beta}$, δείξτε ότι $\vec{v} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να υπολογίσουμε τον λ

Σχόλιο 6

$\vec{v} \parallel \vec{\beta} \Rightarrow \vec{v} = \lambda\vec{\beta}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1)**

Η υπόθεση $\vec{\alpha} = \vec{v} + \vec{u}$ γίνεται $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} + \vec{u}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (\lambda\vec{\beta} + \vec{u})\cdot\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \lambda\vec{\beta}^2 + \vec{u}\cdot\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \lambda\vec{\beta}^2$, αφού $\vec{u} \perp \vec{\beta}$ δηλαδή $\vec{u}\cdot\vec{\beta} = 0$

$\lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}$ αφού $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

Η (1) γίνεται $\vec{v} = \lambda\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}$

21.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\ 2)$, $\vec{\beta}=(2,\ -4)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$, ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}=\vec{x}-3\vec{y}$ και $\vec{x}\perp\vec{y}$ και $\vec{y}\parallel\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να υπολογίσουμε τον λ

$\vec{y}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{y}=\lambda\vec{\beta}$ **(1)**

$\vec{\alpha}=\vec{x}-3\vec{y} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+3\vec{y}=\vec{x}$

$\vec{x}=\vec{\alpha}+3\lambda\vec{\beta}$ **(2)**

$\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y}\cdot\vec{x}=0$

$\lambda\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+3\lambda\vec{\beta})=0$

$\lambda(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})+3\lambda^2\vec{\beta}^2=0,$ αλλά $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=1\cdot 2+2\cdot(-4)=2-8=-6$

και $\vec{\beta}^2=|\vec{\beta}|^2=2^2+(-4)^2=4+16=20$

$\lambda(-6)+3\lambda^2(4+16)=0$

$60\lambda^2-6\lambda=0$

$6\lambda(10\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=\dfrac{1}{10}$

- Για $\lambda=0$, οι (1), (2) δίνουν $\vec{y}=\vec{0}$ και $\vec{x}=\vec{\alpha}=(1,\ 2)$
- Για $\lambda=\dfrac{1}{10}$, οι (1), (2) δίνουν $\vec{y}=\dfrac{1}{10}\vec{\beta}=\dfrac{1}{10}(2,\ -4)=\left(\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$

και
$$\begin{aligned}\vec{x}&=\vec{\alpha}+\frac{3}{10}\vec{\beta}\\&=(1,\ 2)+\frac{3}{10}(2\ ,\ -4)\\&=(1,\ 2)+\left(\frac{3}{5},\ -\frac{6}{5}\right)\\&=\left(1+\frac{3}{5},\ 2-\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)\end{aligned}$$

22.

Αν $\vec{\alpha}=(4,\ 3)$ και $\vec{\beta}=(-1,\ 2)$, να βρεθεί η $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\vec{x}\ =\ \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

Πρέπει να υπολογίσουμε τον λ

$\vec{x},\ \vec{\alpha}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}$ **(1)** όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

Αλλά
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\ \Leftrightarrow$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{x}$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha})$$
$$4(-1)+3.\ 2=\lambda\vec{\alpha}^2$$
$$-4+6=\lambda|\vec{\alpha}|^2\quad\Leftrightarrow\quad 2=25\lambda\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=\frac{2}{25}$$

Οπότε, η (1) $\Leftrightarrow$ $\vec{x}=\frac{2}{25}(4,\ 3)\ =\left(\frac{8}{25},\ \frac{6}{25}\right)$

23.

Αν $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\frac{1}{4}\vec{\beta}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$ να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

$$\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\ \hat{}\ \vec{\beta})\ =\ \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\ =\ \frac{\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}\ =\ \frac{\vec{\alpha}\cdot2\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$$
$$=\ \frac{2\vec{\alpha}^2}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\ =\ \frac{2|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\ =\ \frac{2|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}\qquad\textbf{(1)}$$

Ομοίως
$$\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\ \hat{}\ \vec{\beta})\ =\ \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\ =\ \frac{\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}\ =\ \frac{\vec{\beta}\cdot\frac{1}{4}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$$
$$=\ \frac{\vec{\beta}^2}{4|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{|\vec{\beta}|^2}{4|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\ =\ \frac{|\vec{\beta}|}{4|\vec{\alpha}|}\qquad\textbf{(2)}$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\frac{2|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}\ =\ \frac{|\vec{\beta}|}{4|\vec{\alpha}|}$ $\Rightarrow$ $8|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\beta}|^2$ $\Rightarrow$ $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}|\vec{\alpha}|$ **(3)**

(2) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\ \hat{}\ \vec{\beta})=\frac{|\vec{\beta}|}{4|\vec{\alpha}|}=\frac{2\sqrt{2}|\vec{\alpha}|}{4|\vec{\alpha}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $(\vec{\alpha}\ \hat{}\ \vec{\beta})=\frac{\pi}{4}$

24.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,\ 2)$ και $\vec{\beta} = (-1,\ 4)$. Να βρείτε τα διανύσματα

i) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ **ii)** $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $\vec{x} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

Πρέπει να υπολογίσουμε τον λ

$\vec{\alpha}$, $\vec{x}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{x} = \lambda\vec{\alpha}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1)**

Σχόλιο 10

$\vec{\alpha}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\vec{x}$

$\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\lambda\vec{\alpha}$

$\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}^2$

$1^2 + 2^2 - [1(-1) + 2 \cdot 4] = \lambda(1^2 + 2^2)$

$5 - 7 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{5}$

Η (1) $\Rightarrow$ $\vec{x} = -\frac{2}{5}\vec{\alpha} = -\frac{2}{5}(1,\ 2) = \left(-\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

ii)

Έστω $\vec{y} = \text{προβ}_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

Πρέπει να υπολογίσουμε τον μ

$\vec{\beta}$, $\vec{y}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{y} = \mu\vec{\beta}$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ **(2)**

Σχόλιο 10

$\vec{\beta} \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\beta} \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = \vec{\beta}\,\vec{y}$

$2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = \vec{\beta}(\mu\vec{\beta})$

$2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = \mu\vec{\beta}^2$

$2[1(-1) + 2 \cdot 4] + 3(1^2 + 4^2) = \mu(1^2 + 4^2)$

$14 + 51 = 17\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{65}{17}$

Η (2) $\Rightarrow$ $\vec{y} = \frac{65}{17}(-1,\ 4) = \left(-\frac{65}{17},\ \frac{260}{17}\right)$

25.

Έστω $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ Να βρεθούν

i) η προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ συναρτήσει του $\vec{\alpha}$

ii) η προβολή του $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ στο $\vec{\beta}$ συναρτήσει του $\vec{\beta}$

iii) η προβολή του $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $\vec{x}=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$, τότε $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ **(1)**

Σχόλιο 10

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\ \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\,\vec{x}$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha})$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}^2$$

$$\vec{\alpha}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}^2$$

$$2\vec{\alpha}^2+3\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}^2$$

$$2\cdot1+3\cdot1\cdot2\ \text{συν}\frac{\pi}{3}=\lambda\cdot1$$

$$2+6\cdot\frac{1}{2}=\lambda \Rightarrow \lambda=5$$

Η (1) $\Rightarrow$ $\vec{x}=5\vec{\alpha}$

ii)

Έστω $\vec{y}=\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v}$ τότε $\vec{y}=\mu\vec{\beta}$ όπου $\mu\in\mathbb{R}$ **(2)**

Σχόλιο 10

$$\vec{\beta}\,\vec{v}=\vec{\beta}\ \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v} \Rightarrow \vec{\beta}\,\vec{v}=\vec{\beta}\,\vec{y}$$

$$\vec{\beta}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\beta}\,(\mu\vec{\beta})$$

$$\vec{\beta}\,\vec{\alpha}-\vec{\beta}^2=\mu\vec{\beta}^2$$

$$2\cdot1\ \text{συν}\frac{\pi}{3}-2^2=\mu\cdot2^2$$

$$2\cdot\frac{1}{2}-4=4\mu$$

$$-3=4\mu \Rightarrow \mu=-\frac{3}{4}$$

Η (2) $\Rightarrow$ $\vec{y}=-\frac{3}{4}\vec{\beta}$

iii)

Έστω $\vec{\omega}=\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\alpha}$ τότε $\vec{\omega}=\kappa\vec{\gamma}$ όπου $\kappa\in\mathbb{R}$ **(3)**

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\omega}$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot(\kappa\vec{\gamma})$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\kappa\vec{\gamma}^2$$

$$\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=\kappa(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2$$

$$2\vec{\alpha}^2+3\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\kappa(4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2)$$

$$2\cdot1+3\cdot1\cdot2\ \text{συν}\frac{\pi}{3}=\kappa(4\cdot1+12\cdot1\cdot2\ \text{συν}\frac{\pi}{3}+9\cdot4)$$

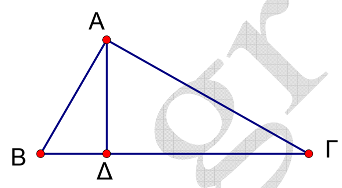
$$2 + 3 = \kappa(4 + 12 + 36)$$
$$5 = 52\kappa \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{5}{52}$$

Η (3) $\Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{5}{52}\vec{\gamma} = \frac{5}{52}(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

26.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ ύψος του. Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2 = -\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}$

Προτεινόμενη λύση



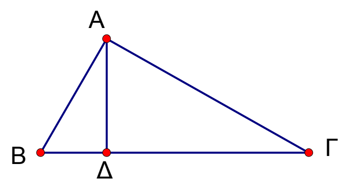
$\hat{\mathrm{A}} = 90^0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + 0 + 0 + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2 = -\overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$$

27.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ ύψος του. Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$

Προτεινόμενη λύση



$\hat{\mathrm{A}} = 90^0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Σχόλιο 11

Αλλά $\quad \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}$

Η (1) $\quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}} = 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$$

28.

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ οι προβολές του Γ στις ευθείες ΑΒ και ΒΔ. Δείξτε ότι $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BZ}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2$

Προτεινόμενη λύση

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BZ}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

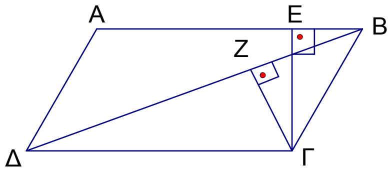
Σχόλιο 11
αντίστροφα

$$= \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

$$= (\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}})\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2$$



29.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 2, ΑΓ = 6, $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ και ΑΜ διάμεσός του. Να βρείτε

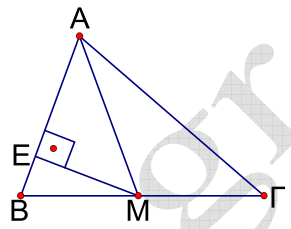
i) το $|\overrightarrow{AM}|$

ii) το $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

iii) την $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει του $\overrightarrow{AB}$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\overrightarrow{AE} = \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}$



i)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}) \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}|$$

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{A\Gamma}|^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{A\Gamma})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(4+36+2\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}) = 13 \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{13}$$

ii)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{A\Gamma})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(4+2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}) = 5$$

iii

Σχόλιο 11

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM} \overset{(ii)}{\Rightarrow} 5 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\overrightarrow{AE}$ συγγραμμικό του $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}$ **(2)**

$$(1) \Rightarrow 5 = \overrightarrow{AB}\cdot(\lambda\overrightarrow{AB}) \Rightarrow 5 = \lambda\,\overrightarrow{AB}^2$$

$$5 = \lambda\,.\,2^2 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

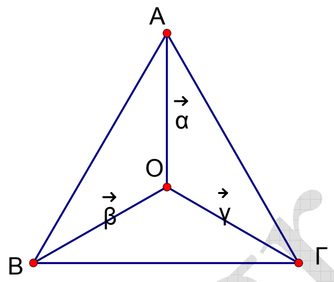
$$(2) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$$

30.

Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = \rho$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο .

Προτεινόμενη λύση

Εργαζόμαστε με σημείο αναφοράς το O.
Θα εκφράσουμε κάθε πλευρά σα συνάρτηση του ρ.



Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \quad \Rightarrow$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{\beta} - \vec{\alpha}|$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{\beta} - \vec{\alpha}|^2 = (\vec{\beta} - \vec{\alpha})^2$$

$$= \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 =$$

$$= |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\alpha}|^2 =$$

$$= \rho^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \rho^2 = 2\rho^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$$

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\gamma}^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2$$

$$\rho^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \rho^2 = \rho^2$$

$$2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\rho^2$$

Οπότε η (1) γίνεται $|\overrightarrow{AB}|^2 = 3\rho^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \rho\sqrt{3}$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = \rho\sqrt{3}$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο