2.1 – 2.2 – 2.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

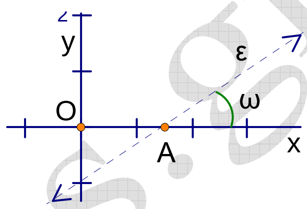
1.

Εξίσωση γραμμής C

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C, και μόνον αυτές, την επαληθεύουν.

2.

Η περίφημη γωνία ω



Έστω ευθεία ε που τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο Α.
Στρέφουμε την ημιευθεία Αx κατά θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ε.
Η γωνία ω που διαγράφεται λέγεται **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.**

Όταν $ε \,//\, x'x$ δεχόμαστε ότι ω = 0.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\mathbf{0^o \leq ω < 180^o}$

3.

Συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας ε

$λ_ε = εφω$ με τον περιορισμό $ω \neq 90^o$

4.

Παραλληλία ευθείας ε με διάνυσμα $\vec{δ}$

$ε \,//\, \vec{δ} \iff λ_ε = λ_{\vec{δ}}$

5.

Ο $λ_ε$, από δύο σημεία της

$λ_ε = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ με τον περιορισμό $x_1 \neq x_2$

Αν $x_1 = x_2$, η ε δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης

6.

Παραλληλία ευθειών

$ε_1 \parallel ε_2 \iff λ_{ε_1} = λ_{ε_2}$

7.

Καθετότητα ευθειών

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1$

8.

Εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από σημείο $A(x_o, y_o)$

- Όταν έχει λ, τότε ε : $y - y_o = \lambda(x - x_o)$
- Όταν δεν έχει λ (κατακόρυφη), τότε ε : $x = x_o$

9.

Ειδικές περιπτώσεις ευθείας ε

- Η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει λ, τότε ε : $y = \lambda x + \beta$
- Η ε διέρχεται από το $O(0, 0)$ και έχει λ, τότε ε : $y = \lambda x$
- Η διχοτόμος δ $1^{ης} - 3^{ης}$ γωνίας των αξόνων δ : $y = x$
- Η διχοτόμος δ΄ $2^{ης} - 4^{ης}$ γωνίας των αξόνων δ΄ : $y = -x$
- Η ε διέρχεται από το $M(0, y_o)$ και είναι // $x'x$, τότε ε : $y = y_o$
- Η ε διέρχεται από το $M(x_o, 0)$ και είναι // $y'y$, τότε ε : $x = x_o$

10.

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας : $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Θεώρημα.

Ευθύ : Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Αντίστροφο : Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

Παρατήρηση : Αν $B \neq 0$ τότε η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ έχει $\lambda = -\dfrac{A}{B}$

11.

Ιδιότητα

Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

12.

Εφαρμογή

Η γωνία δύο ευθειών είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας παραλλήλων της διανυσμάτων.

netsuccess.gr

13.

Απόσταση σημείου από ευθεία

$$d(M_o\,,\,\varepsilon) = \frac{|Ax_o + \beta y_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

14.

Απόσταση παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1: \; y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: \; y = \lambda x + \beta_2$

$$d\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

15.

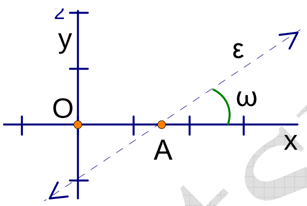
Εμβαδόν τριγώνου : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,|\,\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\,|$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

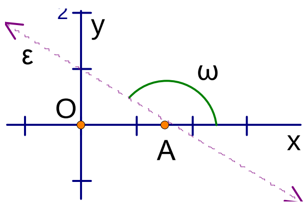
1.

Η γωνία ω που σχηματίζει ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

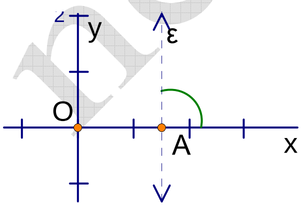
ω οξεία, $\lambda > 0$



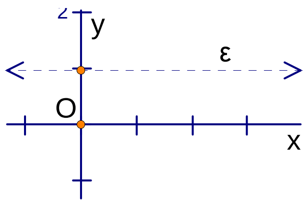
ω αμβλεία, $\lambda < 0$



ω ορθή, δεν έχει λ



ω μηδενική, $\lambda = 0$



netsuccess.gr

2.

Σημείωση

- Η οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ παριστάνει ευθεία, όχι κατακόρυφη.
  Και αντίστροφα, η οποιαδήποτε όχι κατακόρυφη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$.
- Η οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $x = x_o$ παριστάνει κατακόρυφη ευθεία.
  Και αντίστροφα, η οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $x = x_o$

3.

Η ευθεία σαν γεωμετρικός τόπος σημείων

Κάθε μη κατακόρυφη ευθεία ε είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ που έχουν την ιδιότητα $y = \alpha x + \beta$

Άμεση συνέπεια : $M(x, y) \in \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad y = \alpha x + \beta$

Κάθε κατακόρυφη ευθεία ε είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ που έχουν την ιδιότητα $x = x_o$ και $y \in \mathbb{R}$ ελεύθερο.

4.

Η σημασία των λ, β στην ευθεία $y = \lambda x + \beta$

α) Ισχύει $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$, άρα ο συντελεστής λ του x εκφράζει το πόσο πλάγια ή οριζόντια είναι η ευθεία.

β) Για $x = 0$ είναι $y = \beta$, άρα ο β εκφράζει την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$.

5.

Εξίσωση ευθυγράμμου τμήματος

$y = \alpha x + \beta$ με $x \in [x_1, x_2]$

6.

Εξίσωση ημιευθείας

$y = \alpha x + \beta$ με $x \in [x_1, +\infty)$ ή $x \in (-\infty, x_1]$

7.

Μέθοδος

Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση ευθείας $y = \alpha x + \beta$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες δύο σημείων της, δίνοντας δύο τιμές στο x.

netsuccess.gr

8.

Μέθοδος

Για να βρούμε την εξίσωση ευθείας, θεωρούμε ότι η ζητούμενη είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ ή $x = x_o$ και υπολογίζουμε τα α, β, x_o από τα δεδομένα του προβλήματος

9.

Μέθοδος

Για να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

10.

Μέθοδος

Η οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από σημείο $A(x_o, y_o)$ έχει εξίσωση

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \quad ή \quad x = x_o$$

11.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

- Βρίσκουμε την ευθεία των δύο και την επαληθεύουμε από το τρίτο.
- Αποδεικνύουμε ότι $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$

12.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία είναι κορυφές τριγώνου, αποδεικνύουμε ότι δεν είναι συνευθειακά.

13.

Μέθοδος

Τη γωνία δύο ευθειών την ανάγουμε σε γωνία παραλλήλων τους διανυσμάτων.

14.

Γενική οδηγία

Η λύση κάθε προβλήματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας ακολουθεί τον τρόπο κατασκευής του σχήματος σύμφωνα με την εκφώνηση.

15.

Γενική οδηγία

Στα προβλήματα γεωμετρικού τόπου που υπάρχει παράμετρος, κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου.

netsuccess.gr

16.

Προσοχή

Για να βρω την απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία, η εξίσωση της ευθείας πρέπει να είναι στην μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$.

17.

Μέθοδος

Για να βρω την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών, βρίσκω ένα σημείο της μιας και υπολογίζω την απόστασή του από την άλλη .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): \ 2x + 3y - 1 = 0$.

Ευθεία παράλληλη σε δοσμένη

Προτεινόμενη λύση

Έστω (η) η ζητούμενη ευθεία.

$(\eta) \parallel (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_\eta = \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{3}$

Άρα η ζητούμενη ευθεία θα έχει εξίσωση $y = -\frac{2}{3}x + \beta$ **(1)**

Σχόλιο 7

$A \in \eta \Leftrightarrow 4 = -\frac{2}{3}(-2) + \beta \Leftrightarrow 12 = 4 + 3\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{3}$

Η (1) γίνεται $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

2.

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): \ 2x - 1 = 0$.

Ευθεία παράλληλη σε δοσμένη

Προτεινόμενη λύση

Επειδή $(\varepsilon) \parallel y'y$, η ζητούμενη ευθεία θα είναι $\parallel y'y$.

Και αφού διέρχεται από το $A(-2, 4)$ θα έχει εξίσωση $x = -2$

netsuccess.gr

3.

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): \ 2x + 3y - 1 = 0$.

Ευθεία κάθετη σε δοσμένη

Προτεινόμενη λύση

Έστω (η) η ζητούμενη ευθεία.

$(\eta) \perp (\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_\eta \ \lambda_\varepsilon = -1$

$$\lambda_\eta \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_\eta = \frac{3}{2}$$

Σχόλιο 9

Αφού η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο Α,

θα έχει εξίσωση $\quad y - 4 = \frac{3}{2}(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 8 = 3x + 6 \quad \Leftrightarrow$

$$-3x + 2y - 14 = 0$$

4.

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): \ 3y - 1 = 0$.

Ευθεία κάθετη σε δοσμένη

Προτεινόμενη λύση

Επειδή $(\varepsilon) /\!/ x'x$, η ζητούμενη ευθεία θα είναι $\perp x'x$

Και αφού διέρχεται από το $A(-2, 4)$ θα έχει εξίσωση $x = -2$

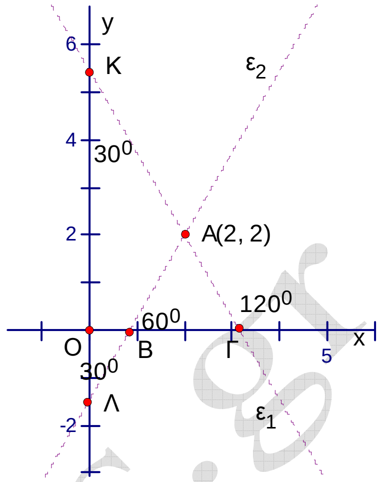
netsuccess.gr

5.

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που να διέρχεται από το σημείο $Α(2, 2)$ και να σχηματίζει με τον άξονα $y'y$ γωνία 30^o.

Γωνία ευθείας με τον άξονα $y'y$

Προτεινόμενη λύση



Από το $Α$ φέρονται δύο ευθείες που να σχηματίζουν με τον άξονα $y'y$ γωνία 30^o, οι $ΑΚΓ$ και $ΑΒΛ$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΚΓ$, η γωνία του $Γ$ θα είναι 60^o, άρα η κλίση της ευθείας $ΑΚΓ$ θα είναι $εφ120^o = -εφ60^o = -\sqrt{3}$.

Επομένως η $ΑΚΓ$ θα έχει εξίσωση

$$y - 2 = -\sqrt{3}\,(x - 2)$$

$$y = -\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3} + 2$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΛΒ$, η γωνία του $Β$ θα είναι 60^o, άρα η κλίση της ευθείας $ΑΒΛ$ θα είναι $εφ60^o = \sqrt{3}$.

Επομένως η $ΑΒΛ$ θα έχει εξίσωση

$$y - 2 = \sqrt{3}\,(x - 2)$$

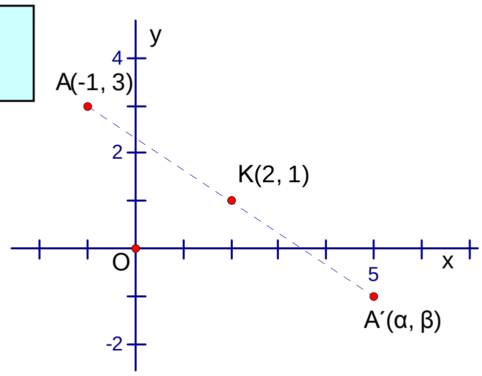
$$y = \sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3} + 2$$

6.

Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $Α(-1, 3)$ ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο $Κ(2, 1)$.

Συμμετρικό σημείου ως προς κέντρο

Προτεινόμενη λύση



Έστω $Α΄(α, β)$ το συμμετρικό του $Α$ $\Leftrightarrow$

$Κ$ μέσο του τμήματος $ΑΑ΄$

$$2 = \frac{α - 1}{2} \quad \text{και} \quad 1 = \frac{β + 3}{2}$$

$$4 = α - 1 \quad \text{και} \quad 2 = β + 3$$

$$α = 5 \quad \text{και} \quad β = -1$$

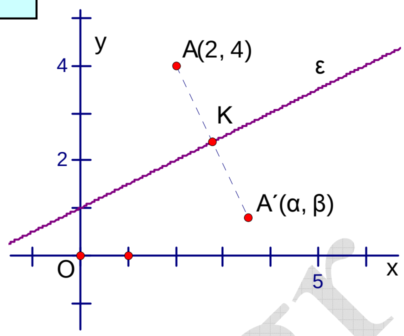
netsuccess.gr

7.

Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(2, 4)$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $x - 2y + 2 = 0$.

Συμμετρικό σημείου ως προς άξονα

Προτεινόμενη λύση



Έστω ε ο άξονα συμμετρίας.

Φέρνουμε $AK \perp \varepsilon \;\Rightarrow\; \lambda_{AK} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1$

Σχόλιο 13

$$\lambda_{AK} \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\lambda_{AK} = -2$$

Εξίσωση της ευθείας AK : $y - 4 = -2(x - 2)$

$$y = -2x + 4 + 4$$

$$y = -2x + 8$$

Το K ορίζεται ως τομή των ευθειών ε και AK, οπότε λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους για να βρούμε τις συντεταγμένες του K.

Σχόλιο 8

Έτσι βρίσκουμε $K(\frac{14}{5}, \frac{12}{5})$.

Πάνω στην ευθεία AK θεωρούμε τμήμα $KA´ = AK$ και έστω $A´(\alpha, \beta)$

K μέσο του τμήματος AA´ $\Rightarrow \quad \frac{14}{5} = \frac{\alpha + 2}{2}$ και $\frac{12}{5} = \frac{\beta + 4}{2}$

$$28 = 5\alpha + 10 \quad \text{και} \quad 24 = 5\beta + 20$$

$$\alpha = \frac{18}{5} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{4}{5}$$

netsuccess.gr

8.

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 3)$, $\Gamma(2, -4)$

i) Να δείξτε ότι είναι κορυφές τριγώνου.

ii) Του τριγώνου αυτού να βρείτε την εξίσωση του ύψους υ_α και την εξίσωση της διαμέσου μ_β.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 11

i)

Αρκεί να δείξουμε ότι τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.

Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ: $\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{-1-1} = -1$

Άρα (ΑΒ): $y - 1 = -1(x-1)$

$y = -x + 2$

Εξετάζουμε αν το Γ ανήκει σ' αυτή την ευθεία : $-4 = -2 + 2$, που είναι άτοπο.

Άρα το Γ δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ, οπότε τα σημεία δεν είναι συνευθειακά .

ii)

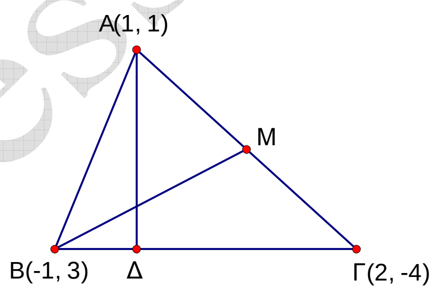
Έστω $A\Delta = \upsilon_\alpha$ και $BM = \mu_\beta$

$\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \dfrac{-4-3}{2+1} = -\dfrac{7}{3}$

$A\Delta \perp B\Gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_{A\Delta} = \dfrac{3}{7}$

Ευθεία ΑΔ: $y - 1 = \dfrac{3}{7}(x-1)$

$y = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{4}{7}$



Μ μέσο του τμήματος ΑΓ $\Rightarrow$ $x_M = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2}$ και $y_M = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2}$

$x_M = \dfrac{1+2}{2}$ και $y_M = \dfrac{1-4}{2}$

Άρα $M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

$$\lambda_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{-\frac{3}{2} - 3}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{-\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{9}{5}$$

Ευθεία ΒΜ : $y - 3 = -\dfrac{9}{5}(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{9}{5}x + \dfrac{6}{5}$

netsuccess.gr

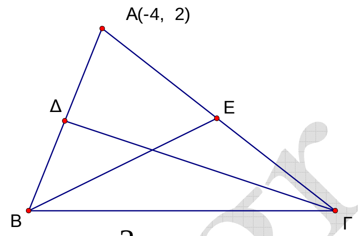
9.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, δίνονται η κορυφή $A(-4,\ 2)$ και οι ευθείες $(\varepsilon):\ y=\frac{3}{2}x+1$, $(\eta):\ y=-\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$ πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο διάμεσοι του. Να βρείτε:

i) Τις κορυφές Β και Γ

ii) Τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου

Προτεινόμενη λύση



i)
Επειδή οι συντεταγμένες του Α δεν επαληθεύουν καμία από τις δοσμένες εξισώσεις, οι ευθείες (ε), (η) δε διέρχονται από το Α.

Έστω ότι η διάμεσος ΒΕ βρίσκεται στην ευθεία $(\varepsilon):\ y=\frac{3}{2}x+1$

και η διάμεσος ΓΔ στην ευθεία $(\eta):\ y=-\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$.

Ε μέσο του ΑΓ $\Rightarrow$ $x_E=\frac{-4+x_\Gamma}{2}$ και $y_E=\frac{2+y_\Gamma}{2}$ **(1)**

$$E\in\varepsilon \Rightarrow y_E=\frac{3}{2}x_E+1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2+y_\Gamma}{2}=\frac{3}{2}\,\frac{-4+x_\Gamma}{2}+1$$

$$2(2+y_\Gamma)=3(-4+x_\Gamma)+4$$

$$4+2y_\Gamma=-12+3x_\Gamma+4$$

$$-3x_\Gamma+2y_\Gamma=-12 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\Gamma\in\eta \Rightarrow y_\Gamma=-\frac{3}{5}x_\Gamma+\frac{12}{5} \Rightarrow 5y_\Gamma=-3x_\Gamma+12$$

$$3x_\Gamma+5y_\Gamma=12 \qquad \textbf{(3)}$$

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε Γ(4, 0)
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε Β(2, 4)

ii)

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-2}{2+4}=\frac{1}{3}, \quad \text{άρα}\ AB:\ y-2=\frac{1}{3}(x+4)$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

Ομοίως βρίσκουμε $A\Gamma:\ y=-\frac{1}{4}x+1$, $B\Gamma:\ y=-2x+8$

netsuccess.gr

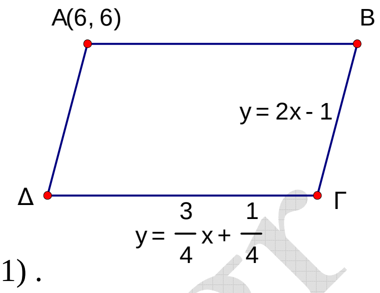
10.

Δύο πλευρές ενός παραλληλόγραμμου βρίσκονται στις ευθείες με εξισώσεις

$y = 2x - 1$ και $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, και το σημείο $A(6, 6)$ είναι μία κορυφή του.

Να βρείτε τις άλλες κορυφές του παραλληλόγραμμου

Προτεινόμενη λύση



Οι συντεταγμένες του A δεν επαληθεύουν καμία από τις δοσμένες εξισώσεις.

Έστω λοιπόν ότι ΔΓ: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ και

ΒΓ: $y = 2x - 1$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $\Gamma(1, 1)$.

Αφού $AB \parallel \Delta\Gamma$, θα είναι $\lambda_{AB} = \lambda_{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$.

Και επειδή η AB διέρχεται από το A(6, 6), θα είναι AB: $y - 6 = \frac{3}{4}(x - 6)$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

Αφού $B\Gamma \parallel A\Delta$, θα είναι $\lambda_{A\Delta} = \lambda_{B\Gamma} = 2$.

Και επειδή η ΑΔ διέρχεται από το A, θα είναι ΑΔ: $y - 6 = 2(x - 6)$

$$y = 2x - 6$$

Λύνοντας το σύστημα των AB: $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ και ΒΓ: $y = 2x - 1$

βρίσκουμε ότι $B(2, 3)$

Και το σύστημα των ΑΔ: $y = 2x - 6$ και ΔΓ: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

βρίσκουμε ότι $\Delta(5, 4)$.

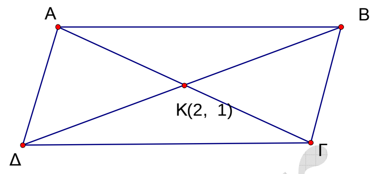
netsuccess.gr

11.

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρο του είναι το σημείο Κ(2, 1) και δύο πλευρές του έχουν εξισώσεις $y = x + 1$, $y = -2x + 4$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών και τις εξισώσεις των διαγωνίων του

Προτεινόμενη λύση

Επειδή οι δοσμένες ευθείες δεν είναι παράλληλες θα είναι δύο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου.



Έστω ότι ΑΒ : $y = x + 1$ και ΑΔ : $y = -2x + 4$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων αυτών

βρίσκουμε Α(1, 2)

Κ μέσο του τμήματος ΑΓ $\Rightarrow$ $x_\kappa = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2}$ και $y_\kappa = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2}$

Σχόλιο 13

$2 = \dfrac{1 + x_\Gamma}{2}$ και $1 = \dfrac{2 + y_\Gamma}{2}$

$4 = 1 + x_\Gamma$ και $2 = 2 + y_\Gamma$

$x_\Gamma = 3$ και $y_\Gamma = 0$. Άρα Γ(3, 0)

ΓΒ ∥ ΑΔ $\Rightarrow$ $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = -2$, οπότε ΒΓ: $y - 0 = -2(x - 3)$

$y = -2x + 6$ και

ΔΓ ∥ ΑΒ $\Rightarrow$ $\lambda_{\Delta\Gamma} = \lambda_{AB} = 1$, οπότε ΔΓ: $y - 0 = x - 3$

$y = x - 3$

$\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{0-2}{3-1} = -1$, άρα ΑΓ: $y - 0 = -(x - 3)$

$y = -x + 3$

Το σύστημα των εξισώσεων ΑΒ : $y = x + 1$ και ΒΓ : $y = -2x + 6$ $\Rightarrow$

$B(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$

$\lambda_{B\Delta} = \lambda_{BK} = \dfrac{1 - \frac{8}{3}}{2 - \frac{5}{3}} = -5$, άρα ΒΔ : $y - \dfrac{8}{3} = -5(x - \dfrac{5}{3})$

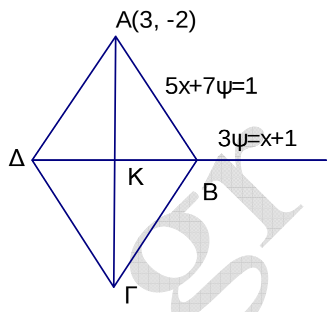
$y = -5x + 11$

12.

Μία πλευρά ενός ρόμβου βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $5x + 7y = 1$, μία κορυφή του έχει συντεταγμένες $(3, -2)$ και μία διαγώνιος του βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $3y = x + 1$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες των υπολοίπων κορυφών του.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $A(3, -2)$.
Επειδή οι συντεταγμένες της κορυφής $A\ (3, -2)$ επαληθεύουν την εξίσωση $5x + 7y = 1$,
η ευθεία αυτή θα περνάει από το Α.



Έστω ότι $AB:\ 5x + 7y = 1$
Αφού οι συντεταγμένες του Α δεν επαληθεύουν την εξίσωση $3y = x + 1$, η εξίσωση αυτή θα είναι η εξίσωση της ευθείας της διαγωνίου ΒΔ.

Λύνοντας το σύστημα των $AB:\ 5x + 7y = 1$

$B\Delta:\ 3y = x + 1$ βρίσκουμε $x_B = -\dfrac{2}{11}$, $y_B = \dfrac{3}{11}$

Είναι $\lambda_{B\Delta} = \dfrac{1}{3}$ και $B\Delta \perp A\Gamma$, άρα $\lambda_{A\Gamma} = -3$, οπότε $A\Gamma:\ y + 2 = -3(x - 3)$

$y = -3x + 7$

Λύνοντας το σύστημα των $A\Gamma:\ y = -3x + 7$

$B\Delta:\ 3y = x + 1$ βρίσκουμε $x_\kappa = 2$, $y_\kappa = 1$

Κ μέσο της διαγωνίου ΑΓ $\Leftrightarrow$ $x_K = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2}$ και $y_K = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2}$

$$2 = \frac{3 + x_\Gamma}{2} \quad \text{και} \quad 1 = \frac{-2 + y_\Gamma}{2}$$

$$4 = 3 + x_\Gamma \quad \text{και} \quad 2 = -2 + y_\Gamma$$

$$x_\Gamma = 1 \quad \text{και} \quad y_\Gamma = 4$$

Κ μέσο της διαγωνίου ΒΔ, ομοίως βρίσκουμε $\Delta\left(\dfrac{46}{11}, \dfrac{19}{11}\right)$

13.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(2\lambda + 1,\ \lambda - 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του γ. τόπου $\Leftrightarrow$ $x = 2\lambda + 1$ και $y = \lambda - 3$

$$x = 2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad \lambda = y + 3$$

$$x = 2(y + 3) + 1$$

$$x = 2y + 6 + 1$$

$$x - 2y - 7 = 0$$

Σχόλιο 14

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $x - 2y - 7 = 0$.

netsuccess.gr

14.

Αν το σημείο $A(\alpha+1,\ \beta-2)$ κινείται στην ευθεία $\varepsilon:\ x+2y=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\alpha-3,\ \beta+1)$.

Προτεινόμενη λύση

$$A \in \varepsilon \iff \alpha+1+2(\beta-2)=1$$

$$\alpha+1+2\beta-4=1$$

$$\alpha+2\beta=4 \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του γ. τόπου $\iff$ $x=\alpha-3$ και $y=\beta+1$

$\alpha=x+3$ και $\beta=y-1$ **(2)**

$$(1) \overset{(2)}{\iff} x+3+2(y-1)=4$$

$$x+2y-3=0$$

Σχόλιο 14

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $x+2y-3=0$.

15.

Σ' ένα τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε $O(0,\ 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2)$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MO}^2=5$

Λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του τόπου.

Τότε $\overrightarrow{MA}=(3-x,\ -y)$, $\overrightarrow{MB}=(1-x,\ 2-y)$, $\overrightarrow{MO}=(-x,\ -y)$

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MO}^2=5 \iff$$

$$2|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2-|\overrightarrow{MO}|^2=5 \iff$$

$$2[(3-x)^2+(-y)^2]-[(1-x)^2+(2-y)^2]-[(-x)^2+(-y)^2]=5 \iff$$

$$2(9-6x+x^2+y^2)-(1-2x+x^2+4-4y+y^2)-(x^2+y^2)=5 \iff$$

$$18-12x+2x^2+2y^2-1+2x-x^2-4+4y-y^2-x^2-y^2=5 \iff$$

$5x-2\psi=4$ ευθεία του γ. τόπου.

netsuccess.gr

16.

Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1 και Π_2 για κάθε χρονική στιγμή t είναι

$\Pi_1\,(t-1,\ t+2)$ και $\Pi_2\,(3t,\ 3t-1)$

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

ii) Να εξετάσετε αν μπορεί τα πλοία να συγκρουστούν.

iii) Να βρεθεί η απόσταση των πλοίων όταν $t = 3$.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 14

i)

$\Pi_1\,(x, y)$ μια τυχαία θέση του Π_1 $\Leftrightarrow$ $x = t-1$ και $y = t+2$

$t = x+1$ και $y = x+1+2$

$y = x+3$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση ευθείας πάνω στην οποία κινείται το Π_1

Ομοίως βρίσκουμε ότι το Π_2 κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = x-1$

ii)

Οι δύο ευθείες προφανώς είναι παράλληλες, άρα τα πλοία δε θα συγκρουστούν.

iii)

Όταν $t = 3$, είναι $\Pi_1(3-1,\ 3+2)$ και $\Pi_2\,(3\cdot 3,\ 3\cdot 3-1)$

$\Pi_1\,(2,\ 5)$ και $\Pi_2\,(9,\ 8)$

Οπότε $\Pi_1\Pi_2 = \sqrt{(9-2)^2+(8-5)^2} = \sqrt{58}$

netsuccess.gr

17.

Το Δεκέμβριο το καλοριφέρ μίας κατοικίας λειτούργησε 4 ώρες την ημέρα και το κόστος έφτασε τα 125 € ενώ τον Ιανουάριο που λειτούργησε 5 ώρες την ημέρα το κόστος έφτασε 145 € .
Αν η συνάρτηση που εκφράζει το μηνιαίο κόστος σε ευρώ είναι $y = \alpha x + \beta$, όπου x είναι οι ώρες λειτουργίας, να βρεθούν

i) Οι τιμές των α και β

ii) Το προβλεπόμενο κόστος για τον Φεβρουάριο αν το καλοριφέρ λειτουργήσει 4,5 ώρες την ημέρα (28 ημέρες).

Προτεινόμενη λύση

i)

Το Δεκέμβριο το καλοριφέρ λειτούργησε συνολικά $4 \cdot 31 = 124$ ώρες

και τον Ιανουάριο $5 \cdot 31 = 155$ ώρες

Οπότε από την $y = \alpha x + \beta$ θα έχουμε $125 = 124\alpha + \beta$ και $145 = 155\alpha + \beta$

$\beta = 125 - 124\alpha$ και $145 = 155\alpha + 125 - 124\alpha$

$\beta = 125 - 124\alpha$ και $20 = 31\alpha$

$\beta = 125 - 124\alpha$ και $\alpha = \dfrac{20}{31}$

$\beta = 125 - 124 \cdot \dfrac{20}{31}$ και $\alpha = \dfrac{20}{31}$

$\alpha = \dfrac{20}{31}$ και $\beta = \dfrac{1395}{31} = 45$

ii)

Η συνάρτηση κόστους γίνεται $y = \dfrac{20}{31}x + 45$

Το καλοριφέρ θα λειτουργήσει $28 \cdot 4,5 = 126$ ώρες

Το κόστος θα είναι $y = \dfrac{20}{31} \cdot 126 + 45 = 126,3$ € περίπου

netsuccess.gr

18.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία να διέρχεται από το σημείο $M(0, 1)$ και τέμνοντας τις ευθείες $\varepsilon_1: \ y = \frac{1}{2}x$ και $\varepsilon_2: \ y = \frac{1}{2}x + 1$ στα σημεία Α και Β, να ισχύει $AB = 1$

Προτεινόμενη λύση

- Όταν η ζητούμενη ευθεία ε έχει λ.

  Τότε η εξίσωση αυτής θα είναι $y - 1 = \lambda(x - 0)$

  $$y = \lambda x + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

  Το σημείο τομής Α των ε, ε_1 είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους $y = \frac{1}{2}x$ και $y = \lambda x + 1$

  Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $A\left(\frac{2}{1-2\lambda}, \ \frac{1}{1-2\lambda}\right)$

  Το σημείο τομής Β των ε, ε_2 είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους $y = \frac{1}{2}x + 1$ και $y = \lambda x + 1$

  Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $B\left(\frac{4}{1-2\lambda}, \ \frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}\right)$

  Πρέπει και αρκεί $AB = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{2}{1-2\lambda} - \frac{4}{1-2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-2\lambda} - \frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}\right)^2} = 1$

  $$\sqrt{\left(\frac{2}{1-2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda}{1-2\lambda}\right)^2} = 1$$

  $$\frac{4}{(1-2\lambda)^2} + \frac{4\lambda^2}{(1-2\lambda)^2} = 1$$

  $$4 + 4\lambda^2 = (1-2\lambda)^2$$

  $$4 + 4\lambda^2 = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{4}$$

  Οπότε η ζητούμενη ευθεία (1) είναι η $y = -\frac{3}{4}x + 1$

- Όταν η ζητούμενη ευθεία ε δεν έχει λ.

  Τότε η εξίσωση αυτής θα είναι $x = 0$

  Η $x = 0$ τέμνει την $y = \frac{1}{2}x$ στο $O(0, 0)$ και την $y = \frac{1}{2}x + 1$ στο $K(0, 1)$

  Επειδή $OK = 1$, η ευθεία $x = 0$ είναι μία άλλη λύση του προβλήματος

netsuccess.gr

19.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 4)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1:\ y = -x + 4$ και $\varepsilon_2:\ y = 2x + 3$ στα σημεία A και B έτσι ώστε το M να είναι μέσο του τμήματος AB.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν η ζητούμενη ευθεία ε έχει λ.
  Τότε η εξίσωση αυτής θα είναι $y - 4 = \lambda(x-1)$
  $y = \lambda x - \lambda + 4$

  Λύνοντας το σύστημα των ε_1, ε βρίσκουμε ότι $A\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1},\ \dfrac{4+3\lambda}{\lambda+1}\right)$

  Λύνοντας το σύστημα των ε_2, ε βρίσκουμε ότι $B\left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2},\ \dfrac{5\lambda-8}{\lambda-2}\right)$

  * (είναι $\lambda \neq -1$, 2 αφού η ε πρέπει να τέμνει τις ε_1, ε_2)

  M μέσο του AB $\Leftrightarrow$ $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ και $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ $\Leftrightarrow$

  $$\frac{\dfrac{\lambda}{\lambda+1} + \dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}}{2} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\dfrac{4+3\lambda}{\lambda+1} + \dfrac{5\lambda-8}{\lambda-2}}{2} = 4 \quad \Leftrightarrow$$

  $$\frac{\lambda(\lambda-2)+(\lambda-1)(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda-2)} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{(4+3\lambda)(\lambda-2)+(5\lambda-8)(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda-2)} = 8 \quad \Leftrightarrow$$

  $$\lambda^2 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 2(\lambda^2 - \lambda - 2) \quad \text{και} \quad 4\lambda - 8 + 3\lambda^2 - 6\lambda + 5\lambda^2 + 5\lambda - 8\lambda - 8 =$$
  $$= 8(\lambda^2 - \lambda - 2) \quad \Leftrightarrow$$

  $2\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4$ και .... $\Leftrightarrow$

  $0 = -3$ και .... που είναι άτοπο

- Όταν η ζητούμενη ευθεία ε δεν έχει λ.
  Τότε η εξίσωση αυτής θα είναι $x = 1$
  Η $x = 1$ τέμνει την $y = -x + 4$ στο σημείο $A(1,\ 3)$
  και την $y = 2x + 3$ στο $B(1,\ 5)$
  Επειδή το $M(1,\ 4)$ είναι μέσο του AB, η ευθεία $x = 1$ είναι η ζητούμενη.

Β΄ τρόπος

M μέσο του AB $\Leftrightarrow$ $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ και $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

$1 = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ και $4 = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

$x_A + x_B = 2$ και $y_A + y_B = 8$

$x_A + x_B = 2$ και $-x_A + 4 + 2x_B + 3 = 8$

$x_A + x_B = 2$ και $-x_A + 2x_B = 1$

$x_A = 1$ και $x_B = 1$

Οπότε $y_A = 3$ και $y_B = 5$, δηλαδή $A(1,\ 3)$ και $B(1,\ 5)$, άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $x = 1$.

20.

Έστω η ευθεία $\varepsilon: \ y = \frac{5}{3}x + 5$. Αν A και B είναι δύο σημεία της ε έτσι ώστε η τετμημένη του B να είναι κατά 3 μεγαλύτερη από την τετμημένη του A, να βρείτε πόσο μεγαλύτερη είναι η τεταγμένη του B από την τεταγμένη του A. Ποια σχέση συνδέει τις διαφορές αυτές με το λ_ε;

Προτεινόμενη λύση

Από υπόθεση είναι $x_B - x_A = 3$

$$y_B - y_A = \frac{5}{3}x_B + 5 - \left(\frac{5}{3}x_A + 5\right)$$

$$= \frac{5}{3}x_B + 5 - \frac{5}{3}x_A - 5$$

$$= \frac{5}{3}(x_B - x_A) = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5$$

Προφανώς $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5}{3} = \lambda_\varepsilon$

netsuccess.gr

21.

Έστω η εξίσωση $(1+3\mu)x + (-2 + 2\mu)y + 5 + 7\mu = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}$ **(1)**

Να δείξετε ότι

i) Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

ii) Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

iii) Να βρείτε εκείνη την ευθεία από τις (1), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) Να βρείτε εκείνη την ευθεία από τις (1), η οποία διέρχεται από το σημείο $B(2, -1)$.

v) Να βρείτε εκείνη την ευθεία από τις (1), η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 4$.

vi) Να βρείτε εκείνη την ευθεία από τις (1), η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x + 3$

vii) Να βρείτε εκείνη την ευθεία από τις (1), η οποία που είναι

α) $//x'x$

β) $//y'y$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η (1) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$.

Θα αποδείξουμε ότι είναι $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (με την απαγωγή σε άτοπο)

Έστω ότι είναι $1+3\mu = 0$ και $-2 + 2\mu = 0 \Rightarrow$

$3\mu = -1$ και $2\mu = 2$

$\mu = -\frac{1}{3}$ και $\mu=1$ που είναι άτοπο.

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

ii)

Βρίσκουμε δύο συγκεκριμένες ευθείες από τις (1), δίνοντας δύο τιμές στο μ.

Για $\mu = -\frac{1}{3}$ έχουμε την ευθεία $y = 1$ και για $\mu = 1$ έχουμε την $x = -3$.

Προφανώς οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο $A(-3, 1)$.

Ελέγχουμε αν οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την (1) για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

Για $x = -3$ και για $y = 1$ η (1) γίνεται $0\mu = 0$ που ισχύει για κάθε μ.

Άρα όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο $A(-3, 1)$.

iii).

$O \in (1) \Leftrightarrow (1+3\mu)0 + (-2 + 2\mu)0 + 5 + 7\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{5}{7}$

Οπότε η (1) γίνεται $\left(1+3(-\frac{5}{7})\right)x + \left(-2 + 2(-\frac{5}{7})\right)y + 5 + 7(-\frac{5}{7}) = 0$

$-\frac{8}{7}x - \frac{24}{7}y = 0$

$y = -\frac{1}{3}x$

iv)

$B \in (1) \Leftrightarrow (1+3\mu)2 + (-2 + 2\mu)(-1) + 5 + 7\mu = 0$

$2 + 6\mu + 2 - 2\mu + 5 + 7\mu = 0$

$$11\mu = -9 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -\frac{9}{11}$$

Οπότε η (1) γίνεται $\left(1+3(-\frac{9}{11})\right)x + \left(-2+2(-\frac{9}{11})\right)y + 5 + 7(-\frac{9}{11}) = 0$

$2x + 5y + 1 = 0.$

v)

(1) // $y = -x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{(1)} = -1$

$$\frac{-1-3\mu}{-2+2\mu} = -1$$

$$-1 - 3\mu = 2 - 2\mu$$

$$-\mu = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -3.$$

Οπότε η (1) γίνεται $\left(1+3(-3)\right)x + \left(-2+2(-3)\right)y + 5 + 7(-3) = 0$

$-8x - 8y - 16 = 0$

$x + y - 2 = 0$

vi)

$(1)\perp\ y = 2x+3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{(1)}.2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$

$$\frac{-1-3\mu}{-2+2\mu} = -\frac{1}{2}$$

$$-2 - 6\mu = 2 - 2\mu$$

$$-4\mu = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -1$$

Οπότε η (1) γίνεται $\left(1+3(-1)\right)x + \left(-2+2(-1)\right)y + 5 + 7(-1) = 0$

$-2x - 4y - 2 = 0$

$x + 2\psi + 1 = 0$.

vii)

α) (1) // $x'x \quad \Leftrightarrow \quad 1+3\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -\frac{1}{3}$

Οπότε η (1) γίνεται $\left(1+3(-\frac{1}{3})\right)x + \left(-2+2(-\frac{1}{3})\right)y + 5 + 7(-\frac{1}{3}) = 0$

$-\frac{8}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

$y = -1$

β) (1) // $y'y \quad \Leftrightarrow \quad -2 + 2\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1.$

Οπότε η (1) γίνεται $(1+3.1)x + (-2 + 2.\ 1)y + 5 + 7.\ 1 = 0$

$4x + 12 = 0$

$x = -3$

22.

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας

$$(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0\,,\quad \lambda\in\mathbb{R} \qquad \mathbf{(1)}$$

περιγράφει την φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας φάρος Φ.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

ii) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,\ 2)$, $\Lambda(-1,\ 5)$ και $M(1, 3)$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K, Λ, M.

iii) Να βρείτε ποιο από τα πλοία K, Λ βρίσκεται πλησιέστερα στην ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M

Προτεινόμενη λύση

i)

Για $\lambda=1$, η (1) γίνεται $y=2$ (ευθεία ε_1)

Για $\lambda=-1$, η (1) γίνεται $x=-1$ (ευθεία ε_2)

Σημείο τομής των ευθειών ε_1, ε_2 είναι το $\Phi(-1,\ 2)$

Ελέγχουμε αν οι ευθείες (1) διέρχονται από το Φ :

$$\Phi\in(1) \iff (\lambda-1)(-1)+(\lambda+1)\cdot 2-\lambda-3=0$$

$$-\lambda+1+2\lambda+2-\lambda-3=0$$

$0\lambda=0$, που αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$,

άρα όλες οι ευθείες (1) διέρχονται από το σημείο $\Phi(-1,\ 2)$

ii)

Αφού $\Phi(-1,\ 2)$ και $K(2,\ 2)$ η ευθεία ΦΚ έχει εξίσωση $y=2$

$\Phi(-1,\ 2)$ και $\Lambda(-1,\ 5)$ η ευθεία ΦΛ έχει εξίσωση $x=-1$

$\Phi(-1,\ 2)$ και $M(1,\ 3)$ η ευθεία ΦΜ έχει εξίσωση $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$$x-2y+5=0$$

iii)

$$d(K,\ \Phi M)=\frac{|2-4+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\,,\qquad d(\Lambda,\ \Phi M)=\frac{|-1-10+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Αφού $d(K,\ \Phi M)<d(\Lambda,\ \Phi M)$, πλησιέστερα βρίσκεται το πλοίο K

netsuccess.gr

23.

Να δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - x + 3y - 2 = 0$ με $x, y \in \mathbb{R}$ παριστάνει δύο ευθείες.

Προτεινόμενη λύση

$x^2 - y^2 - x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - (y^2 - 3y + 2) = 0$ **(1)**

$$\Delta = 1 + 4(y^2 - 3y + 2) = 1 + 4y^2 - 12y + 8$$
$$= 4y^2 - 12y + 9$$
$$= (2y - 3)^2 \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm (2y-3)}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+(2y-3)}{2} \text{ ή } x = \frac{1-(2y-3)}{2}$$

$$2x = 1 + 2y - 3 \text{ ή } 2x = 1 - 2y + 3$$
$$2x - 2y + 2 = 0 \text{ ή } 2x + 2y - 4 = 0$$
$$x - y + 1 = 0 \text{ ή } x + y - 2 = 0$$

24.

Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1 : \sqrt{3}x + 3y - 15 = 0$ και
$\varepsilon_2 : \sqrt{3}x - 3y + 3 = 0$

Προτεινόμενη λύση

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ε_1 είναι το $\vec{\delta} = (B, -A) = (3, -\sqrt{3})$

και ένα παράλληλο στην ε_2 είναι το $\vec{v} = (-3, -\sqrt{3})$

Σχόλιο 12

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}, \vec{v}}) = \frac{\vec{\delta} \cdot \vec{v}}{|\vec{\delta}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3(-3) - \sqrt{3}(-\sqrt{3})}{\sqrt{3+3^2}\,\sqrt{3+3^2}}$$
$$= \frac{-9+3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \text{άρα} \quad (\widehat{\vec{\delta}, \vec{v}}) = 120^o$$

Οπότε μία από τις γωνίες των δύο ευθειών είναι 120^o, συνεπώς η οξεία γωνία τους θα είναι 60^o.

netsuccess.gr

25.

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: \ \lambda x-(\lambda+1)y=1$ και $\varepsilon_2: \ x-2y=2-\lambda$.

i) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών.

ii) Στην περίπτωση που οι ευθείες τέμνονται, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής τους

Προτεινόμενη λύση

i)

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & -\lambda-1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2\lambda+\lambda+1=-\lambda+1$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & -\lambda-1\\ 2-\lambda & -2\end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2+2\lambda-1=-(1-\lambda)^2$$

- Όταν $D\neq 0 \Leftrightarrow -\lambda+1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$

  το σύστημα έχει μία μόνο λύση την $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda}=\lambda$

  $$y=\frac{D_\psi}{y}=\frac{-(1-\lambda)^2}{1-\lambda}=\lambda-1$$

  Που σημαίνει ότι οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $P(\lambda,\ \lambda-1)$

- Όταν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ τότε το σύστημα γίνεται $x-2\psi=1$

  Που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται

ii)

Το σημείο τομής όπως είδαμε είναι το $P(\lambda,\ \lambda-1)$ με $\lambda\neq 1$

Αν $P(x,\ \psi)$ είναι μία τυχαία θέση του P, τότε $x=\lambda$ και $y=\lambda-1$

Κάνοντας απαλοιφή του λ έχουμε $y=x-1$

Δηλαδή το P κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-1$

εξαιρούμενου του σημείου της $(1,\ 0)$ (αφού $\lambda\neq 1$)

Σχόλιο 5

netsuccess.gr

26.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Γ(3, 5) και τα σημεία Α(– 7, 3) και Β(11, – 15) ισαπέχουν από αυτή.

Προτεινόμενη λύση

Α)

Όταν η ζητούμενη ευθεία έχει λ.

Τότε θα είναι της μορφής $\varepsilon: \ y - 5 = \lambda(x - 3)$

$$y - 5 = \lambda x - 3\lambda$$

$$\lambda x - y - 3\lambda + 5 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Πρέπει $d(A, \varepsilon) = d(B, \varepsilon) \Leftrightarrow \dfrac{|-7\lambda - 3 - 3\lambda + 5|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \dfrac{|11\lambda + 15 - 3\lambda + 5|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$

$$|-10\lambda + 2| = |8\lambda + 20|$$

$$-10\lambda + 2 = 8\lambda + 20 \quad \text{ή} \quad -10\lambda + 2 = -8\lambda - 20$$

$$-18\lambda = 18 \quad \text{ή} \quad -2\lambda = -22$$

$$\lambda = -1 \quad \text{ή} \quad \lambda = 11$$

- Για $\lambda = -1$ η (1) γίνεται $1x - y - 3\cdot 1 + 5 = 0$

  $$x - y + 2 = 0$$

- Για $\lambda = 11$ η (1) γίνεται $11x - y - 3\cdot 11 + 5 = 0$

  $$11x - y - 28 = 0$$

Β)

Όταν η ζητούμενη ευθεία δεν έχει λ, οπότε $\varepsilon: \ x = 3$

Είναι $d(A, \varepsilon) = \dfrac{|-7 + 0\cdot 3 - 3|}{\sqrt{1 + 0}} = 10$ και $d(B, \varepsilon) = \dfrac{|11 + 0\cdot(-15) - 3|}{\sqrt{1 + 0}} = 8$

$d(A, \varepsilon) \neq d(B, \varepsilon)$, άρα η ευθεία $x = 3$ δεν αποτελεί λύση του προβλήματος .

netsuccess.gr

27.

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: \ 2x - y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: \ 4x + \kappa y + 6 = 0$

i) Να βρείτε το κ ώστε να είναι παράλληλες

ii) Για την τιμή του κ που βρήκατε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο ευθειών

iii) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης αυτών

Προτεινόμενη λύση

i)

$\varepsilon_1: \ 2x - y + 4 = 0 \iff y = 2x + 4$ άρα $\lambda_{\varepsilon_1} = 2$

$\varepsilon_2: 4x + \kappa y + 6 = 0 \iff y = -\frac{4}{\kappa}x - \frac{6}{\kappa}$ με $\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{4}{\kappa}$ (αναγκαστικά είναι $\kappa \neq 0$)

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \iff \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \iff -\frac{4}{\kappa} = 2 \iff \kappa = -2$

Τότε η (ε_2) γίνεται $4x - 2y + 6 = 0 \iff 2x - y + 3 = 0$

ii)

Ένα σημείο της ε_1 είναι το $A(0, 4)$ οπότε

Σχόλιο 16

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \ \varepsilon_2) = \frac{|2\cdot 0 - 1\cdot 4 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

iii)

Α΄ τρόπος

Επειδή η μεσοπαράλληλη περνάει από το μέσο οποιουδήποτε τμήματος που έχει τα άκρα του στις δύο παράλληλες και έχει το ίδιο λ με αυτές, σκεφτόμαστε ως εξής
Ένα σημείο της ε_1 είναι όπως είδαμε το $A(0, \ 4)$ ένα σημείο της ε_2 είναι το $B(0, 3)$.

Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $M(0, \ \frac{7}{2})$.

Άρα η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η ευθεία που διέρχεται από το Μ

και έχει $\lambda = 2$, δηλαδή $y - \frac{7}{2} = 2x \iff y = 2x + \frac{7}{2}$

Β΄ τρόπος .

Έστω λοιπόν $\Gamma(\alpha, \beta)$ τυχαίο σημείο της μεσοπαράλληλης $\iff$

$$d(\Gamma, \varepsilon_1) = d(\Gamma, \varepsilon_2)$$

$$\frac{|2\alpha - \beta + 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2\alpha - \beta + 3|}{\sqrt{4+1}}$$

$$|2\alpha - \beta + 4| = |2\alpha - \beta + 3|$$

$2\alpha - \beta + 4 = 2\alpha - \beta + 3$ ή $2\alpha - \beta + 4 = -(2\alpha - \beta + 3)$

$4 = 3$ ή $2\alpha - \beta + 4 = -2\alpha + \beta - 3$

αδύνατη ή $4\alpha - 2\beta + 7 = 0$.

netsuccess.gr

28.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1,\ 2)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 4$ τ.μ.

Προτεινόμενη λύση

Η ζητούμενη ευθεία αφού θέλουμε να τέμνει τους άξονες δεν μπορεί να είναι ούτε κάθετη ούτε οριζόντια

Έστω λοιπόν ότι $\varepsilon:\ y-2=\lambda(x+1) \Leftrightarrow y=\lambda x+\lambda+2$ η ζητούμενη ευθεία .

Για $x = 0$ έχουμε $y = \lambda + 2$, άρα η ε τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,\lambda+2)$

Για $y = 0$ έχουμε $x=-\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$, άρα η ε τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\Gamma\left(-\dfrac{\lambda+2}{\lambda},\ 0\right)$

Αφού το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ορθογώνιο στο Ο το εμβαδόν του είναι ίσο με

$$E=\frac{1}{2}OB\cdot O\Gamma \Leftrightarrow 4=\frac{1}{2}|\lambda+2|\cdot\left|-\frac{\lambda+2}{\lambda}\right|$$

$$4=\frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}$$

$$\lambda^2+4\lambda+4=8|\lambda|$$

$$\lambda^2+4\lambda-8|\lambda|+4=0$$

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $\lambda > 0$, η εξίσωση γίνεται $\lambda^2-4\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=2$
  Τότε $\varepsilon:\ y=2x+4$
- Αν $\lambda < 0$, η εξίσωση γίνεται $\lambda^2+12\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=-6\pm4\sqrt{2}$
  Τότε $\varepsilon:\ y=(-6+4\sqrt{2})x-4+4\sqrt{2}$ ή $y=(-6-4\sqrt{2})x-4-4\sqrt{2}$

netsuccess.gr

29.

Ένα χωριό X έχει συντεταγμένες $X(2,\ 6)$. Ένα αυτοκίνητο κινείται σ' έναν δρόμο και η θέση του καθορίζεται από το σημείο $A(\lambda-1,\ 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε

i) Την εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το αυτοκίνητο.

ii) Να εξετάσετε αν το αυτοκίνητο θα περάσει από το χωριό

iii) Ποια είναι η ποιο μικρή απόσταση της πορείας του αυτοκινήτου από το χωριό

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν $A(x\ ,\ y)$ τυχαία θέση του αυτοκίνητου, τότε $x = \lambda - 1$ και $y = 2 + \lambda$

$\lambda = x + 1$ και $y = 2 + x + 1$

$-x + y - 3 = 0$

Επομένως το αυτοκίνητο κινείται στην ευθεία $\varepsilon:\ -x + y - 3 = 0$

ii)

Επειδή οι συντεταγμένες του χωριού $X(2,\ 6)$ δεν επαληθεύουν την εξίσωση (ε), το αυτοκίνητο δεν θα περάσει από το χωριό.

iii)

Η ποιο μικρή απόσταση της πορείας του αυτοκινήτου από το χωριό ισούται με την απόσταση του σημείου $X(2,\ 6)$ από την ευθεία (ε). $d(X,\ \varepsilon) = \dfrac{|2-6+3|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

netsuccess.gr

30.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες

Προτεινόμενη λύση

i)

Η εξίσωση γράφεται $y^2 + (2x - 3)y + x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (2x - 3)^2 - 4(x^2 - 3x + 2) = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x - 8 = 1.$

Άρα $y = \dfrac{-(2x-3)\pm 1}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{-(2x-3)+1}{2}$ ή $y = \dfrac{-(2x-3)-1}{2}$

$y = \dfrac{-2x+3+1}{2}$ ή $y = \dfrac{-2x+3-1}{2}$

$y = -x + 2$ ή $y = -x + 1$

ευθείες προφανώς παράλληλες

ii)

Η ε_1: $y = -x + 1$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(0, 1)$

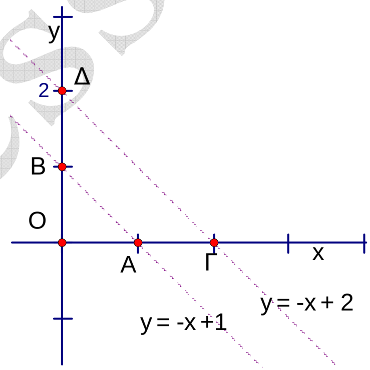
Η ε_2: $y = -x + 2$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(2, 0)$ και $\Delta(0, 2)$

Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ είναι

$(AB\Delta\Gamma) = (O\Delta\Gamma) - (OAB) =$

$= \dfrac{1}{2} O\Delta \cdot O\Gamma - \dfrac{1}{2} OA \cdot OB =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{3}{2}$ τετρ. μονάδες.



31.

Το εμβαδόν ενός παραλληλόγραμμου είναι $E = 12$. Δύο από τις κορυφές του είναι οι $A(-1, 3)$, $B(-2, 4)$ και το κέντρο του είναι σημείο του άξονα $x'x$.

i) Να αποδείξετε ότι οι κορυφές A και B είναι διαδοχικές κορυφές του παραλληλογράμμου

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών

Προτεινόμενη λύση

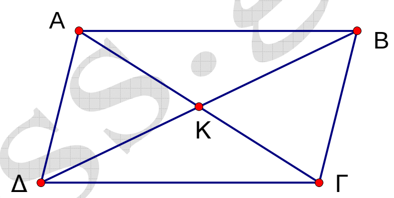
i)

Το μέσο του AB έχει τεταγμένη $\frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \neq 0$ άρα δε βρίσκεται στον $x'x$.

Αν οι κορυφές A και B ήταν απέναντι, τότε το μέσο του AB θα ήταν το κέντρο του παραλληλόγραμμου, όμως το μέσο του AB δεν είναι σημείο του $x'x$.

Συνεπώς οι κορυφές A και B δεν είναι απέναντι

ii)



Έστω $K(\alpha, 0)$ το κέντρο του παραλληλόγραμμου .

Γνωρίζουμε ότι τα τέσσερα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το παραλληλόγραμμο από τις διαγώνιές του είναι ισοδύναμα, συνεπώς $(KAB) = 3$

$\overrightarrow{KA} = (-1-\alpha, \ 3)$, $\overrightarrow{KB} = (-2-\alpha, \ 4)$

$$\det(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}) = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 3 \\ -2-\alpha & 4 \end{vmatrix} = -4-4\alpha+6+3\alpha = 2-\alpha$$

Επομένως $(KAB) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|2-\alpha| = 3$

$|2-\alpha| = 6$

$2-\alpha = 6$ ή $2-\alpha = -6$

$\alpha = -4$ ή $\alpha = 8$

- Για $\alpha = -4$ είναι $K(-4, 0)$

  K μέσο του ΑΓ $\Rightarrow$ $-4 = \frac{x_A + x_\Gamma}{2}$ και $0 = \frac{y_A + y_\Gamma}{2}$

  $-4 = \frac{-1+x_\Gamma}{2}$ και $0 = \frac{3+y_\Gamma}{2}$

  $-8 = -1 + x_\Gamma$ και $0 = 3 + y_\Gamma$

  $x_\Gamma = -7$ και $y_\Gamma = -3$

  Ομοίως βρίσκουμε $\Delta(-6, -4)$

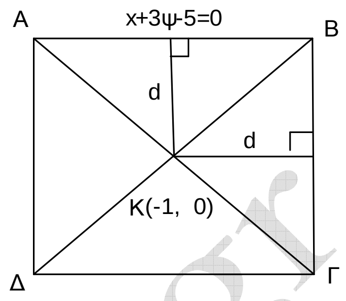
- Για $\alpha = 8$ και με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\Gamma(17, -3)$ και $\Delta(18, -4)$

32.

Ένα τετράγωνο έχει κέντρο $K(-1,\ 0)$ και μία πλευρά του βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $x + 3y - 5 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες είναι οι άλλες πλευρές του τετραγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ΑΒΓΔ το τετράγωνο



$$d(K,\ AB) = \frac{|-1+3\cdot 0-5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

Αφού ΔΓ ||ΑΒ θα είναι

ΔΓ: $x + 3y + \kappa = 0$

$$d(K,\ \Delta\Gamma) = \frac{6}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|-1+3\cdot 0+\kappa|}{\sqrt{1+9}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$|-1+\kappa| = 6$

$-1 + \kappa = 6$ ή $-1 + \kappa = -6$

$\kappa = 7$ ή $\kappa = -5$

- Για $\kappa = -5$ προκύπτει η ευθεία ΑΒ
- Για $\kappa = 7$ προκύπτει η ευθεία ΓΔ : $x + 3\psi + 7 = 0$

Αφού ΒΓ και $A\Delta \perp AB$, και $\lambda_{AB} = -\frac{1}{3}$, θα είναι $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = 3$

Οπότε οι εξισώσεις των ΒΓ , ΑΔ θα έχουν την μορφή $y = 3x + \mu \Leftrightarrow$

$3x - y + \mu = 0$

$$d(K,\ B\Gamma) = d(K,\ A\Delta) = \frac{6}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|3(-1)-1\cdot 0+\mu|}{\sqrt{1+9}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$|\mu - 3| = 6$

$\mu - 3 = 6$ ή $\mu - 3 = -6$

$\mu = 9$ ή $\mu = -3$

Οπότε ΒΓ : $3x - y + 9 = 0$ και ΑΔ : $3x - y - 3 = 0$ ή

ΒΓ : $3x - y - 3 = 0$ και ΑΔ : $3x - y + 9 = 0$

netsuccess.gr

33 .

Δίνονται οι ευθείες ε_1 : $4x - 3y + 2 = 0$, ε_2 : $7x + 24y + 3 = 0$.
Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από αυτές.

Προτεινόμενη λύση

M(x, y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου τότε

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|4x-3y+2|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|7x+24y+3|}{\sqrt{49+576}}$$

$$\frac{|4x-3y+2|}{5} = \frac{|7x+24y+3|}{25}$$

$$5\,|4x-3y+2| = |7x+24y+3|$$

$$5(4x - 3y + 2) = 7x + 24y + 3 \quad ή \quad 5(4x - 3y + 2) = -(7x + 24y + 3)$$

$$\eta_1 : \quad 13x - 39y + 7 = 0 \quad ή \quad \eta_2 : \quad 27x + 9y + 13 = 0$$

Οι ευθείες η_1, η_2 είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Παρατήρηση. Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2, άρα οι ευθείες η_1, η_2 είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων.

netsuccess.gr