3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εξίσωση κύκλου (Ο, ρ)

$x^2 + y^2 = \rho^2$

2.

Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου

$x = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y = \rho\eta\mu\varphi$

3.

Εφαπτομένη κύκλου

$xx_1 + yy_1 = \rho^2$

4.

Εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ρ

$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$

5.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

Είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Γενική μέθοδος

Για την επίλυση του μεγάλου όγκου των προβλημάτων :

α) Θεωρούμε τους απαραίτητους αγνώστους.
β) Μετατρέπουμε τις υποθέσεις του προβλήματος σε εξισώσεις
γ) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων
δ) Ακολουθούμε βήμα – βήμα την εκφώνηση

2.

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία

α) Η μεσοκάθετος χορδής κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
β) Η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη
γ) Σημείο $M \in$ σε κύκλο (K, ρ) $\Leftrightarrow$ $KM = \rho$
Σημείο $M \in$ στο εσωτερικό κύκλου (K, ρ) $\Leftrightarrow$ $KM < \rho$
Σημείο $M \in$ στο εξωτερικό κύκλου (K, ρ) $\Leftrightarrow$ $KM > \rho$

3.

Σχετικές θέσεις ευθείας ε και κύκλου (Κ, ρ) :

α) Η ε εφάπτεται του κύκλου $\Leftrightarrow$ $d(K, \varepsilon) = \rho$
$\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μία μόνο λύση (διπλή ρίζα)

β) Η ε τέμνει τον κύκλο $\Leftrightarrow$ $d(K, \varepsilon) < \rho$
$\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεών τους έχει δύο λύσεις.

γ) Η ε δεν έχει κοινό σημείο με τον κύκλο $\Leftrightarrow$ $d(K, \varepsilon) > \rho$
$\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αδύνατο.

4.

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων :

α) Εφάπτονται $\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μία μόνο λύση (διπλή ρίζα)

β) Τέμνονται $\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεών τους έχει δύο ακριβώς λύσεις

β) Δεν έχουν κοινό σημείο $\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αδύνατο

5.

Επισήμανση

Η μορφή $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ της εφαπτομένης κύκλου ισχύει μόνο για κύκλο της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$

6.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο

Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το μέσο της υποτείνουσας και η ακτίνα το μισό της υποτείνουσας.

7.

Στον κύκλο

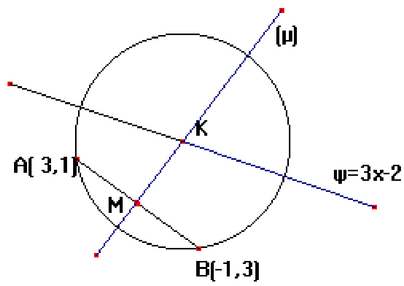
Η μεσοκάθετος της χορδής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (3, 1) , (−1,3) και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε : y = 3x − 2..

Προτεινόμενη λύση



Έστω $C: \ (x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$

η ζητούμενη εξίσωση κύκλου.

$$A\in C \iff (3-x_o)^2+(1-y_o)^2=\rho^2$$
$$9-6x_o+x_o^2+1-2y_o+y_o^2=\rho^2$$
$$x_o^2+y_o^2-6x_o-2y_o+10=\rho^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$B\in C \iff (-1-x_o)^2+(3-y_o)^2=\rho^2$$
$$1+2x_o+x_o^2+9-6y_o+y_o^2=\rho^2$$
$$x_o^2+y_o^2+2x_o-6y_o+10=\rho^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Σχόλιο 1

Το κέντρο $K\in\varepsilon \iff y_o=3x_o-2 \qquad \textbf{(3)}$

Σύστημα των (1), (2), (3) :

$$\begin{array}{l} x_o^2+y_o^2-6x_o-2y_o+10=\rho^2 \\ x_o^2+y_o^2+2x_o-6y_o+10=\rho^2 \\ y_o=3x_o-2 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_o^2+y_o^2-6x_o-2y_o+10=\rho^2 \\ (1)-(2):\ -8x_o+4y_o=0 \\ y_o=3x_o-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_o^2+y_o^2-6x_o-2y_o+10=\rho^2 \\ y_o=2x_o \\ y_o=3x_o-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_o^2+y_o^2-6x_o-2y_o+10=\rho^2 \\ y_o=2x_o \\ 2x_o=3x_o-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_o^2+y_o^2-6x_o-2y_o+10=\rho^2 \\ y_o=4 \\ x_o=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4+16-12-8+10=\rho^2 \\ y_o=4 \\ x_o=2 \end{array} \iff \begin{array}{l} \rho=\sqrt{10} \\ y_o=4 \\ x_o=2 \end{array}$$

Άρα $C: \ (x-2)^2+(y-4)^2=10$

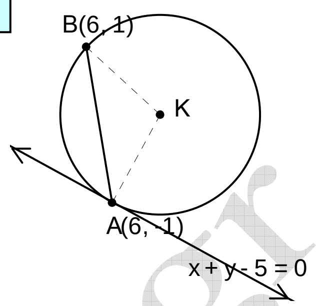
2.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: \ x + y - 5 = 0$ στο σημείο $A(6, \ -1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(6,1)$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $C: \ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$ η ζητούμενη εξίσωση κύκλου.

Σχόλιο 1



$$A \in C \iff (6 - x_o)^2 + (-1 - y_o)^2 = \rho^2$$

$$36 - 12x_o + x_o^2 + 1 + 2y_o + y_o^2 = \rho^2$$

$$x_o^2 + y_o^2 - 12x_o + 2y_o + 37 = \rho^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$B \in C \iff (6 - x_o)^2 + (1 - y_o)^2 = \rho^2$$

$$36 - 12x_o + x_o^2 + 1 - 2y_o + y_o^2 = \rho^2$$

$$x_o^2 + y_o^2 - 12x_o - 2y_o + 37 = \rho^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$KA \perp \varepsilon \iff \lambda_{KA} . \lambda_\varepsilon = -1$$

$$\frac{y_o + 1}{x_o - 6}(-1) = -1$$

$$y_o + 1 = x_o - 6 \iff y_o = x_o - 7 \quad \textbf{(3)}$$

Σύστημα των (1), (2), (3) :

$$\begin{cases} x_o^2 + y_o^2 - 12x_o + 2y_o + 37 = \rho^2 \\ x_o^2 + y_o^2 - 12x_o - 2y_o + 37 = \rho^2 \\ y_o = x_o - 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_o^2 + y_o^2 - 12x_o - 2y_o + 37 = \rho^2 \\ (1) - (2): \quad 4y_o = 0 \\ x_o = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^2 - 12 \cdot 7 + 37 = \rho^2 \\ y_o = 0 \\ x_o = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = 2 \\ y_o = 0 \\ x_o = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ y_o = 0 \\ x_o = 7 \end{cases}$$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι $(x - 7)^2 + y^2 = 2$

3.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(8, 0)$, $O(0,0)$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: \ y = -2$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $C: \ (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = \rho^2$ η ζητούμενη εξίσωση κύκλου.

$KA = KO \iff (KA)^2 = (KO)^2$

$$(8-x_o)^2 + (0-y_o)^2 = (0-x_o)^2 + (0-y_o)^2$$

$$64 - 16x_o + x_o^2 + y_o^2 = x_o^2 + y_o^2$$

$$64 - 16x_o = 0$$

$$x_o = 4$$

Σχόλιο 2

$d(K, \varepsilon) = KO \iff d(K, \varepsilon) = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$

$$\frac{|y_o + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \sqrt{4^2 + y_o^2}$$

$$(y_o + 2)^2 = 16 + y_o^2$$

$$y_o^2 + 4y_o + 4 = 16 + y_o^2$$

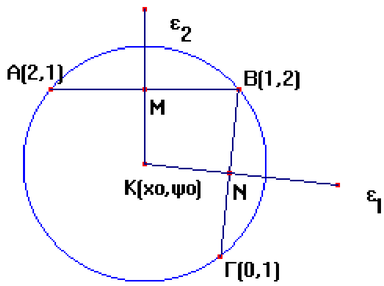
$$4y_o = 12 \iff y_o = 3$$

$\rho = KO = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

4.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(0, 1)$



Προτεινόμενη λύση

Το κέντρο K του ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων (ε_1), (ε_2) των χορδών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

N μέσο της $B\Gamma$ $\Leftrightarrow$ $x_N = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$ και $y_N = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\varepsilon_1 \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\dfrac{1-2}{0-1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -1$

Σχόλιο 7

$$\varepsilon_1 : \ y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2y - 3 = -2x + 1$$

$$2y = -2x + 4$$

$$y = -x + 2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως $\varepsilon_2 : \ y = x$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) $\Leftrightarrow$ $K(1, 1)$

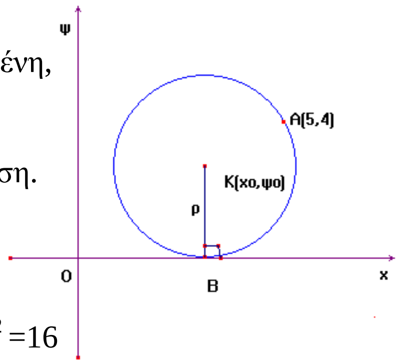
Ακτίνα του κύκλου : $\rho = K\Gamma = \sqrt{(0-1)^2 + (1-1)^2} = 1$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

5.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει ακτίνα 4 , εφάπτεται στον x΄x και διέρχεται από το σημείο Α(5, 4)

Προτεινόμενη λύση



Επειδή ο κύκλος εφάπτεται στον x΄x και διέρχεται από το σημείο Α(5, 4) το οποίο έχει θετική τεταγμένη, αυτός θα βρίσκεται πάνω από τον x΄x.

Έστω $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=4^2$ η ζητούμενη εξίσωση.

Αφού ο κύκλος εφάπτεται στον x΄x

Θα είναι $4=\rho=KB=|y_o|=y_o$

Η εξίσωση του κύκλου γίνεται $(x-x_o)^2+(y-4)^2=16$

$A(5,\ 4)\in$ στον κύκλο $\Leftrightarrow$ $(5-x_o)^2+(4-4)^2=16$

$(5-x_o)^2=16 \Leftrightarrow$

$5-x_o=4$ ή $5-x_o=-4$

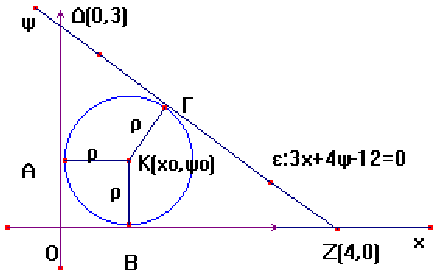
$x_o=1$ ή $x_o=9$

Υπάρχουν λοιπόν δύο κύκλοι που λύνουν το πρόβλημα.

Οι εξισώσεις τους είναι $(x-9)^2+(y-4)^2=16$ ή $(x-1)^2+(y-4)^2=16$.

6.
Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στους άξονες και στην ευθεία $\varepsilon:\ 3x+4y-12=0$

Προτεινόμενη λύση



Έστω $K(x_o,\ y_o)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα.
Θα είναι $d(K,\ \varepsilon)=d(K,\ x'x)=d(K,\ y'y)=\rho$

$$\frac{|3x_o+4y_o-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|y_o|=|x_o|$$

$$\frac{|3x_o+4y_o-12|}{5}=|y_o|=|x_o|$$

$$|3x_o+4y_o-12|=5|y_o|=5|x_o|$$

$$3x_o+4y_o-12=\pm 5y_o \quad \text{και} \quad 3x_o+4y_o-12=\pm 5x_o$$

- Για $3x_o+4y_o-12=5y_o$ και $3x_o+4y_o-12=5x_o$

$3x_o-12=y_o$ και $4y_o-12=2x_o$

$3x_o-12=y_o$ και $4(3x_o-12)-12=2x_o$

$3x_o-12=y_o$ και $12x_o-48-12=2x_o$

$3x_o-12=y_o$ και $10x_o=60$

$3x_o-12=y_o$ και $x_o=6$

$18-12=y_o$ και $x_o=6$

$y_o=6$ και $x_o=6$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι $(x-6)^2+(y-6)^2=6^2$

- Ομοίως θα έχουμε άλλες τρεις περιπτώσεις συνδυάζοντας τα $\pm$, από τις οποίες θα βρούμε ακόμα μία λύση του προβλήματος τον κύκλο $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, αφού στις υπόλοιπες προκύπτουν αδύνατα συστήματα.

7.
Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^2+2y^2+3x+y-2=0$ παριστάνει κύκλο. Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Προτεινόμενη λύση

Διαιρώντας με το 2 η εξίσωση γίνεται $x^2+y^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-1=0$, η οποία είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

Και επειδή $A^2+B^2-4\Gamma=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+4=\frac{26}{4}>0$ παριστάνει κύκλο

Κέντρο : $K\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)=\left(-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{4}$

8.

Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - y - 3 + \lambda(x + y - 2) = 0$ **(1)**

Δείξτε ότι

i) Η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Για τις διάφορες τιμές του λ, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

Προτεινόμενη λύση

i)

(1) $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + 2x - y - 3 + \lambda x + \lambda y - 2\lambda = 0$

$x^2 + y^2 + (\lambda+2)x + (\lambda - 1)y - 2\lambda - 3 = 0$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

με $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 2)^2 + (\lambda - 1)^2 - 4(-2\lambda - 3)$

$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 8\lambda + 12$

$= 2\lambda^2 + 10\lambda + 16$

$= 2(\lambda^2 + 5\lambda + 8)$

Διακρίνουσα $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$

Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$ δηλαδή θετικό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 2(\lambda^2 + 5\lambda + 8) > 0$

Επομένως η (1) είναι εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in R$ με κέντρο

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{\lambda+2}{2}, -\frac{\lambda-1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 10\lambda + 16}}{2}$

Δίνουμε δύο τιμές στο λ ώστε να έχουμε δύο συγκεκριμένους από τους κύκλους (1)

Για $\lambda = 1$, κύκλος C_1: $x^2 + y^2 + 2x - y - 3 + 1(x + y - 2) = 0$

$x^2 + y^2 + 3x - 5 = 0$

Για $\lambda = -2$, κύκλος C_2: $x^2 + y^2 + 2x - y - 3 - 2(x + y - 2) = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - y - 3 - 2x - 2y + 4 = 0$

$x^2 + y^2 - 3y + 1 = 0$

Σύστημα των C_1, C_2 : Αφαιρώντας παίρνουμε $3x + 3y - 6 = 0$

$x + y - 2 = 0$

$y = 2 - x$ **(2)**

C_1 $\Leftrightarrow$ $x^2 + (2 - x)^2 + 3x - 5 = 0$

$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 3x - 5 = 0$

$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$

Για $x = 1$, η (2) δίνει $y = 1$ σημείο τομής $A(1, 1)$

Για $x = -\frac{1}{2}$, η (2) δίνει $y = \frac{5}{2}$ σημείο τομής $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Ελέγχουμε αν η (1) επαληθεύεται από το $A(1, 1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$1^2 + 1^2 + 2\cdot 1 - 1 - 3 + \lambda(1 + 1 - 2) = 0 \Leftrightarrow 0 + 0\cdot\lambda = 0$ που ισχύει

Άρα οι κύκλοι (1) διέρχονται από το A.

Ομοίως για το σημείο B.

9.

Αν $Α – 2Β – Γ = 5$, να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, διέρχονται από σταθερό σημείο.

Προτεινόμενη λύση

Βρίσκουμε δύο συγκεκριμένους κύκλους C δίνοντας αυθαίρετες τιμές στα Β, Γ.

Για $B = 0$ και $\Gamma = 0$ η $A – 2B – \Gamma = 5 \Rightarrow A = 5$

Κύκλος $C_1: x^2 + y^2 + 5x = 0$

Για $B = 0$ και $\Gamma = -1$ η $A – 2B – \Gamma = 5 \Rightarrow A = 4$

Κύκλος $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$

Λύνουμε το σύστημα των C_1, C_2 για να βρούμε τα σημεία τομής τους.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 5x = 0 \\ (-): \quad x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + y^2 - 5 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \quad ή \quad y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Σημεία τομής των C_1, C_2: $K(-1, 2)$, $\Lambda(-1, -2)$

Ελέγχουμε αν οι κύκλοι C επαληθεύονται από το Κ.

Δηλαδή αν $(-1)^2 + 2^2 + A(-1) + B \cdot 2 + \Gamma = 0$

$1 + 4 – A + 2B + \Gamma = 0$

$5 = A – 2B – \Gamma$ που ισχύει.

Επομένως οι κύκλοι C διέρχονται από το σταθερό σημείο $K(-1, 2)$

10.

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων

$C_1: \ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0, \qquad C_2: \ x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$

Προτεινόμενη λύση

Κέντρο $K_1\left(-\frac{A}{2}, \ -\frac{B}{2}\right) = K_1\left(-\frac{-6}{2}, \ -\frac{-2}{2}\right) = K_1(3, \ 1)$

και ακτίνα $\rho_1 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 4 - 36}}{2} = 1$

Κέντρο $K_2\left(-\frac{-6}{2}, \ -\frac{-10}{2}\right) = (3, 5)$

και ακτίνα $\rho_2 = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-10)^2 - 4.\ 25}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 100 - 100}}{2} = 3$

Διάκεντρος : $K_1 K_2 = \sqrt{(3-3)^2 + (1-5)^2} = 4$

Αλλά $\rho_1 + \rho_2 = 4$, άρα $K_1K_2 = \rho_1 + \rho_2$, επομένως οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

11.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία η : $y = x + 3$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής και ε : $xx_1 + y\,y_1 = 9$ εφαπτομένη.

$$ε \,//\, η \Leftrightarrow λ_ε = λ_η \Leftrightarrow -\frac{y_1}{x_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = -x_1 \qquad \textbf{(1)}$$

$M(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 9$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) : $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 9 \\ y_1 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1^2 = 9 \\ y_1 = -x_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x_1^2 = 9 \\ y_1 = -x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3/\sqrt{2} \quad ή \quad x_1 = -3/\sqrt{2} \\ y_1 = -x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3/\sqrt{2} \quad ή \quad x_1 = -3/\sqrt{2} \\ y_1 = -3/\sqrt{2} \quad ή \quad y_1 = 3/\sqrt{2} \end{cases}$$

Άρα ε : $x\frac{3}{\sqrt{2}} - y\frac{3}{\sqrt{2}} = 9$ ή $-x\frac{3}{\sqrt{2}} + y\frac{3}{\sqrt{2}} = 9$

$x - y = 3\sqrt{2}$ ή $-x + y = 3\sqrt{2}$

12.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$, οι οποίες άγονται από το σημείο Α(3, 6).

Προτεινόμενη λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής και ε: $xx_1 + y\,y_1 = 9$ ζητούμενη εφαπτομένη.

$A \in \varepsilon \iff 3x_1 + 6\,y_1 = 9 \iff x_1 + 2\,y_1 = 3$ **(1)**

$M(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $\iff x_1^2 + y_1^2 = 9$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) : $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 9 \\ x_1 + 2y_1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 9 \\ x_1 = 3 - 2y_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (3-2y_1)^2 + y_1^2 = 9 \\ x_1 = 3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - 12y_1 + 4y_1^2 + y_1^2 = 9 \\ x_1 = 3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y_1^2 - 12y_1 = 0 \\ x_1 = 3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(5y_1 - 12) = 0 \\ x_1 = 3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \quad ή \quad y_1 = 12/5 \\ x_1 = 3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \quad ή \quad y_1 = 12/5 \\ x_1 = 3 \quad ή \quad x_1 = -9/5 \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon:\ x\cdot 3 + y\cdot 0 = 9$ ή $x\left(-\dfrac{9}{5}\right) + y\dfrac{12}{5} = 9 \iff$

$x = 3$ ή $-3x + 4y = 15$

13.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$ στο σημείο του $A(2, 2)$.

Προτεινόμενη λύση

Κέντρο του κύκλου : $K\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{-8}{2},\ -\frac{0}{2}\right) = K(4, 0)$

$\lambda_{KA} = \frac{2-0}{2-4} = -1$

Η εφαπτομένη ε στο Α είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ $\Rightarrow$ $\lambda_\varepsilon \lambda_{KA} = -1$

$\lambda_\varepsilon(-1) = -1$

$\lambda_\varepsilon = 1$

ε : $y - 2 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x$

14 .
Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες
ε_1: $2x + y - 5 = 0$ και ε_2: $2x + y + 15 = 0$ και το ένα σημείο επαφής είναι το $A(2, 1)$

Προτεινόμενη λύση

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ότι το A είναι σημείο της ε_1.

Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής της μεσοπαράλληλης των ε_1, ε_2 με την κάθετη AK της ε_1 στο σημείο A.

Εξίσωση της μεσοπαράλληλης :

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο της $\Leftrightarrow$ $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|2x+y+15|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|2x+y-5| = |2x+y+15|$$

$$2x + y - 5 = 2x + y + 15 \quad ή \quad 2x + y - 5 = -(2x + y + 15)$$

$$-5 = 15 \quad ή \quad 2x + y - 5 = -2x - y - 15$$

$$\text{αδύνατη} \quad ή \quad 4x + 2y = -10$$

$$y = -2x - 5$$

Εξίσωση της AK :

$$AK \perp \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_{AK} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AK}(-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AK} = \frac{1}{2}$$

$$AK: \quad y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Σύστημα των $y = -2x - 5$ και $y = \frac{1}{2}x$ $\Leftrightarrow$ $K(-2, -1)$

Ακτίνα του κύκλου : $\rho = d(K, A) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Εξίσωση του κύκλου : $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$

15.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$ **(1)**
που άγεται από το σημείο Α(3, 3).

Προτεινόμενη λύση

1ος τρόπος. (Για οποιαδήποτε κωνική τομή)

Αφού η ζητούμενη εφαπτομένη ε διέρχεται από το Α(3, 3) θα είναι

$\varepsilon: x = 3$ ή $\varepsilon: y - 3 = \lambda(x - 3)$

Σχόλιο 3α

- Όταν $\varepsilon: x = 3$ **(2)**

ε εφαπτομένη $\Leftrightarrow$ το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) έχει διπλή ρίζα.

$$\text{Η } (1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3^2 + y^2 - 8\cdot 3 + 8 = 0$$
$$9 + y^2 - 24 + 8 = 0$$
$$y^2 = 7 \quad \text{η οποία δεν έχει διπλή ρίζα,}$$

άρα η ευθεία $x = 3$ δεν είναι εφαπτομένη.

- Όταν $\varepsilon: y - 3 = \lambda(x - 3) \Leftrightarrow y = \lambda x + 3 - 3\lambda$ **(3)**

ε εφαπτομένη $\Leftrightarrow$ το σύστημα των εξισώσεων (1), (3) έχει διπλή ρίζα.

$$\text{Η } (1) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2 + (\lambda x + 3 - 3\lambda)^2 - 8x + 8 = 0$$
$$x^2 + \lambda^2 x^2 + 9 + 9\lambda^2 + 6\lambda x - 6\lambda^2 x - 18\lambda - 8x + 8 = 0$$
$$(\lambda^2+1)\, x^2 + (6\lambda - 6\lambda^2 - 8)x + (9\lambda^2 - 18\lambda + 17) = 0$$
$$(\lambda^2+1)\, x^2 + 2(3\lambda - 3\lambda^2 - 4)x + (9\lambda^2 - 18\lambda + 17) = 0$$

$$\text{Διπλή ρίζα} \Leftrightarrow \Delta = 0$$
$$(3\lambda - 3\lambda^2 - 4)^2 - (\lambda^2+1)(9\lambda^2 - 18\lambda + 17) = 0$$
$$9\lambda^2 + 9\lambda^4 + 16 - 18\lambda^3 - 24\lambda + 24\lambda^2 - 9\lambda^4 + 18\lambda^3 - 17\lambda^2 - 9\lambda^2 + 18\lambda - 17 = 0$$
$$7\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$
$$\delta = 36 + 28 = 64 > 0, \qquad \lambda = \frac{6 \pm 8}{14} = 1 \text{ ή } -\frac{1}{7}$$

Από την (3), η η ζητούμενη εφαπτομένη ε είναι

$$y = 1x + 3 - 3\cdot 1 \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1}{7}x + 3 - 3\left(-\frac{1}{7}\right)$$
$$y = x \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1}{7}x + 3 + \frac{3}{7}$$
$$y = x \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1}{7}x + \frac{24}{7}$$

2^{ος} τρόπος. (Μόνο για κύκλο)

Κέντρο του κύκλου : $K\left(-\frac{-8}{2},\ -\frac{0}{2}\right) = (4, 0)$

Ακτίνα του κύκλου : $\rho = \frac{\sqrt{(-8)^2 + 0^2 - 4\cdot 8}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$

Αφού η ζητούμενη εφαπτομένη ε διέρχεται από το Α(3, 3) θα είναι

$\varepsilon : x = 3$ ή $\varepsilon : y - 3 = \lambda(x - 3)$

Σχόλιο 3α

- Όταν $\varepsilon : x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ **(2)**

  ε εφαπτομένη $\Leftrightarrow$ $d(K, \varepsilon) = \rho$

  $$\frac{|1\cdot 4 + 0\cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2\sqrt{2}$$

  $1 = 2\sqrt{2}$ αδύνατο,

  άρα η ευθεία $x = 3$ δεν είναι εφαπτομένη

- Όταν $\varepsilon : y - 3 = \lambda(x - 3) \Leftrightarrow -\lambda x + y + (3\lambda - 3) = 0$ **(3)**

  ε εφαπτομένη $\Leftrightarrow$ $d(K, \varepsilon) = \rho$

  $$\frac{|-\lambda\cdot 4 + 1\cdot 0 + 3\lambda - 3|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

  $$|-\lambda - 3| = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

  $$(\lambda + 3)^2 = 8(\lambda^2 + 1)$$

  $$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 8\lambda^2 + 8$$

  $$7\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

  $\Delta = 36 + 28 = 64 > 0$, $\lambda = \frac{6 \pm 8}{14} = 1$ ή $-\frac{1}{7}$

  Από την (3), η ζητούμενη εφαπτομένη ε είναι

  $-x + y = 0$ ή $\frac{1}{7}x + y - \frac{3}{7} - 3 = 0$

  $y = x$ ή $y = -\frac{1}{7}x + \frac{24}{7}$

16.

Δίνεται ο κύκλος $C: \ x^2+y^2+\lambda x-\lambda y=0$, $\lambda\neq 0$ και η ευθεία $\varepsilon: \ y=x+1$.
Να βρείτε το λ ώστε η ε να είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

Κέντρο του κύκλου : $K(-\frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda}{2})$

Ακτίνα του κύκλου : $\rho=\dfrac{\sqrt{\lambda^2+\lambda^2-4\cdot 0}}{2}=\dfrac{\sqrt{2\lambda^2}}{2}=\dfrac{|\lambda|\sqrt{2}}{2}$

ε εφαπτομένη του κύκλου $\Leftrightarrow$ $d(K,\ \varepsilon)=\rho$

$$\frac{\left|-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|\lambda|\sqrt{2}}{2}$$

$$|-\lambda+1|=|\lambda|$$

$$(1-\lambda)^2=\lambda^2$$

$$1-2\lambda+\lambda^2=\lambda^2$$

$$1=2\lambda \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{1}{2}$$

17.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + (y^2 - 5)x + y^2 - 3$. Να αποδείξετε ότι

i) Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$

ii) Η εξίσωση $x^3 + y^2 - x^2 + xy^2 - 5x - 3 = 0$ παριστάνει έναν κύκλο και μία ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο.

Προτεινόμενη λύση

i)

$P(-1) = -1 - 1 - y^2 + 5 + y^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow$ το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii)

$x^3 + y^2 - x^2 + xy^2 - 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 + (y^2 - 5)x + y^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = 0$

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για το $P(x)$ για $x = -1$ βρίσκουμε

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + y^2 - 3)$$

Η εξίσωση $P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0$ ή $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$

Η $x + 1 = 0$ είναι εξίσωση ευθείας ε.

Η $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ είναι εξίσωση κύκλου αφού $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 12 = 16 > 0$

Κέντρο του κύκλου $K(-\frac{A}{2}, \; -\frac{B}{2}) = K(1, \; 0)$

Ακτίνα του κύκλου $\rho = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$

$d(K, \; \varepsilon) = \frac{|1+1|}{\sqrt{1}} = 2 = \rho$, άρα η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο

18.

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(1, 3)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $MA^2 + MB^2 = 4$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημεία του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

$$MA^2 + MB^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 19 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 6y + \frac{19}{2} = 0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

με $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 9 + 36 - 38 = 7 > 0$,

άρα είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(\frac{3}{2}, \; 3)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{7}}{2}$

19.

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: \ \lambda x - y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: \ x + \lambda y - \lambda = 0$

Να δείξτε ότι

i) Οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Το σημείο τομής τους κινείται σε κύκλο κέντρου O (αρχή των αξόνων).

Προτεινόμενη λύση

i)

Σύστημα των $\varepsilon_1: \ \lambda x - y = 1$, $\varepsilon_2: \ x + \lambda y = \lambda$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1, \qquad Dx = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda, \qquad Dy = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Αφού $D = \lambda^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει πάντοτε μία λύση την

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} \quad \text{και} \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$$

Άρα οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}, \ \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right)$

ii)

Έστω $A(x, \ y)$ τυχαία θέση του A $\Rightarrow$ $x = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}$ και $y = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right)^2$$

$$= \frac{4\lambda^2}{\lambda^4+2\lambda^2+1} + \frac{\lambda^4-2\lambda^2+1}{\lambda^4+2\lambda^2+1}$$

$$= \frac{\lambda^4+2\lambda^2+1}{\lambda^4+2\lambda^2+1} = 1$$

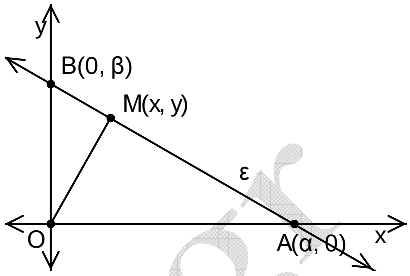
Επομένως το A κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ με κέντρο $O(0, 0)$ και $\rho = 1$.

20.

Στην ευθεία $\varepsilon: \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$ τα α, β μεταβάλλονται έτσι, ώστε $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{1}{\kappa^2}$, όπου κ θετική σταθερά. Να αποδείξετε ότι η προβολή της αρχής Ο των αξόνων στην ευθεία ε ανήκει σε σταθερό κύκλο (ανεξάρτητο των α, β).

Προτεινόμενη λύση

Έστω M(x, y) η προβολή του Ο στην τυχαία ε.



$M\in\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1 \;\Leftrightarrow\; \beta x + \alpha y = \alpha\beta$ **(1)**

$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$x_{\overrightarrow{OM}}\, x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{OM}}\, y_{\overrightarrow{AB}} = 0$

$(x-0)(0-\alpha)+(y-0)(\beta-0)=0$

$x\alpha - y\beta = 0$

$\beta = \dfrac{\alpha x}{y}$ **(2)**

Απαλοιφή των α, β

$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha x}{y}x + \alpha y = \alpha\dfrac{\alpha x}{y}$

$\dfrac{x^2}{y} + y = \dfrac{\alpha x}{y}$

$x^2 + y^2 = \alpha x \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ **(3)**

$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} \beta = \dfrac{x^2+y^2}{y}$ **(4)**

Η υπόθεση $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{1}{\kappa^2} \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{1}{\kappa^2}$

$\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{1}{\kappa^2}$

$\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{\kappa^2}$

$x^2+y^2=\kappa^2$

21.

Ένας κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x΄x$. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου, να δείξτε ότι $(x_1 - x_2)^2 = 4y_1y_2$

Προτεινόμενη λύση

Αφού ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x΄x$, θα είναι $\rho = |y_o|$

Έτσι η εξίσωσή του θα είναι της μορφής $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = y_o^2$ **(1)**

Το κέντρο του $K(x_o,\ y_o)$ θα είναι το μέσο του AB, οπότε

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y_o = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Επειδή το Α ανήκει στον κύκλο, η (1) γίνεται

$$\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2$$

$$\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{4} = \frac{(y_1 + y_2)^2}{4}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 4y_1y_2$$

22.

Η ευθεία $\varepsilon: \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και ο κύκλος $C: x^2+y^2=\rho^2$ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής ΑΒ συναρτήσει των α, β.

Προτεινόμενη λύση

Οι συντεταγμένες των Α, Β είναι οι λύσεις του συστήματος των ε, C.

$$\varepsilon: \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \iff \frac{y}{\beta}=1-\frac{x}{\alpha} \iff y=\frac{\alpha\beta-\beta x}{\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

$$C: x^2+y^2=\rho^2 \overset{(1)}{\iff} x^2+\frac{(\alpha\beta-\beta x)^2}{\alpha^2}=\rho^2$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta^2x+\beta^2x^2=\alpha^2\rho^2$$

$$(\alpha^2+\beta^2)x^2-2\alpha\beta^2x+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\rho^2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι x_A, x_B

Επειδή Μ μέσο της ΑΒ $\Rightarrow$ $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}\frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

$M\in\varepsilon \Rightarrow y_M=\frac{\alpha\beta-\beta x_M}{\alpha}=\beta-\frac{\beta}{\alpha}x_M=\beta-\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{2}\frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

23.

Για τους $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda, \mu \neq 0$ ισχύουν

$x_1^2 + y_1^2 = \lambda x_1 + \mu y_1$ και $x_2^2 + y_2^2 = \lambda x_2 + \mu y_2$.

Να αποδείξετε ότι $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq \lambda^2 + \mu^2$.

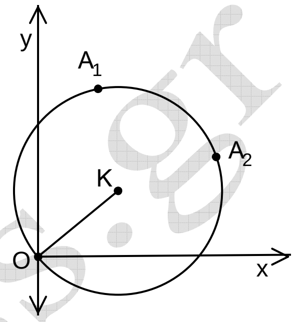
Αποτυπώνουμε όλα τα στοιχεία του προβλήματος σε σχήμα

Προτεινόμενη λύση

Η $x_1^2 + y_1^2 = \lambda x_1 + \mu y_1 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - \lambda x_1 - \mu y_1 = 0$ **(1)**

Η $x_2^2 + y_2^2 = \lambda x_2 + \mu y_2 \Leftrightarrow x_2^2 + y_2^2 - \lambda x_2 - \mu y_2 = 0$ **(2)**

Θεωρούμε τον κύκλο $C: \ x^2 + y^2 - \lambda x - \mu y = 0$,
ο οποίος προφανώς διέρχεται από το $O(0, 0)$ και
έχει κέντρο $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$



Οπότε $(KO)^2 = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\lambda^2 + \mu^2) \Rightarrow$

$$\lambda^2 + \mu^2 = 4(KO)^2$$

Θεωρούμε επίσης τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$,
τα οποία λόγω των (1), (2) ανήκουν στον κύκλο.

Η αποδεικτέα $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq \lambda^2 + \mu^2$ γράφεται

$(A_1A_2)^2 \leq 4(KO)^2$

$A_1A_2 \leq 2KO$

χορδή $\leq$ διαμέτρου, που ισχύει

24.

Για κάθε σημείο $M(x, y)$ του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ να αποδείξετε ότι

$|xy| \le \dfrac{\rho^2}{2}$ και $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} \ge \dfrac{4}{\rho^2}$ (εδώ $x, y \ne 0$)

Προτεινόμενη λύση

$$|xy| \le \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow 2|xy| \le \rho^2$$

$$2|xy| \le x^2+y^2$$

$$2|x|\,|y| \le |x|^2+|y|^2$$

$$0 \le |x|^2+|y|^2-2|x|\,|y|$$

$$0 \le (|x|-|y|)^2 \text{ που ισχύει}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge \frac{4}{\rho^2} \Leftrightarrow \rho^2 y^2+\rho^2 x^2 \ge 4x^2y^2$$

$$\rho^2(y^2+x^2) \ge 4x^2y^2$$

$$\rho^2\rho^2 \ge 4x^2y^2$$

$$\rho^4 \ge (2xy)^2$$

$$\rho^2 \ge 2|xy|, \text{ που ισχύει από το προηγούμενο ερώτημα.}$$

* Με ύψωση στο τετράγωνο μπορούμε να αποδείξουμε τις ανισώσεις $|x \pm y| \le \rho\sqrt{2}$ χρησιμοποιώντας και την ισοδυναμία

$$|xy| \le \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{\rho^2}{2} \le xy \le \frac{\rho^2}{2}$$