3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Ονομάζουμε **παραβολή με εστία σημείο Ε και διευθετούσα ευθεία (δ)** το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από το Ε και τη (δ)

2.

Εξίσωση παραβολής

- $y^2 = 2px$, όπου $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ η εστία και $x = -\frac{p}{2}$ η διευθετούσα.
- $x^2 = 2py$, όπου $E\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ η εστία και $y = -\frac{p}{2}$ η διευθετούσα.

3.

Ιδιότητες παραβολής

- Στην παραβολή $y^2 = 2px$, η παράμετρος p και το $x \neq 0$ είναι ομόσημοι
  Στην παραβολή $x^2 = 2py$, η παράμετρος p και το $y \neq 0$ είναι ομόσημοι
- Ο άξονας στον οποίο βρίσκεται η εστία είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής

4.

Εφαπτομένη παραβολής

- (ε) : $yy_1 = p(x + x_1)$ της $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1,\ y_1)$
- (ε) : $xx_1 = p(y + y_1)$ της $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M_1(x_1,\ y_1)$

5.

Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής σε ένα σημείο Μ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ΜΕ και η ημιευθεία Μt που είναι ομόρροπη της ΟΕ όπου Ε η εστία της παραβολής .

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Γενική μέθοδος

Για την επίλυση του μεγάλου όγκου των προβλημάτων :

α) Θεωρούμε τους απαραίτητους αγνώστους.
β) Μετατρέπουμε τις υποθέσεις του προβλήματος σε εξισώσεις
γ) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων
δ) Ακολουθούμε βήμα – βήμα την εκφώνηση

2.

Για εφαπτομένη από σημείο που δεν ανήκει στην παραβολή

Θεωρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης έχοντας αγνώστους τις συντεταγμένες του σημείου επαφής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω η παραβολή $x^2 = 8y$ και το σημείο της $M(12, 18)$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο Μ

ii) Αν η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Α , δείξτε ότι $MA \perp AE$, όπου Ε η εστία της παραβολής

Προτεινόμενη λύση

i)

$2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$. Άρα $E(0, 2)$

Η εφαπτομένη (ε) : $xx_1 = 4(y + y_1)$

$12x = 4(18+y)$

$y = 3x - 18$

ii)

Για $y = 0$ η (ε) δίνει $0 = 3x - 18 \Leftrightarrow x = 6$. Άρα $A(6, 0)$

$$\lambda_{MA} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{0-18}{6-12} = 3 \quad \text{και} \quad \lambda_{EA} = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}$$

Άρα $\lambda_{MA} \cdot \lambda_{EA} = -1 \Rightarrow MA \perp AE$

2.

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, εστία στον άξονα x΄x και εφάπτεται στην ευθεία $y = 2x + 1$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου επαφής ;

Προτεινόμενη λύση

Έστω $y^2 = 2px$ η ζητούμενη παραβολή και $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη θα είναι $yy_1 = p(x + x_1)$

Τρεις άγνωστοι p, x_1, y_1. Χρειαζόμαστε τρεις εξισώσεις

$$yy_1 = px + px_1$$

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1}$$

Η ευθεία αυτή για να ταυτίζεται με την $y = 2x + 1$ θα πρέπει να ισχύουν

$$\frac{p}{y_1} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{px_1}{y_1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2y_1 \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad px_1 = y_1 \quad \textbf{(2)}$$

Όμως το σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή , άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, δηλαδή $y_1^2 = 2px_1$ **(3)**

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) βρίσκουμε

$$p = 4 , \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = 2$$

Επομένως η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και το σημείο επαφής $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

3.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 6x$, από την οποία εφαπτομένη η κορυφή Ο απέχει απόσταση $\sqrt{3}$.

Προτεινόμενη λύση

Δύο άγνωστοι x_1, y_1. Χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις

Είναι $2p = 6$, άρα $p = 3$

Έστω $A(x_1, \psi_1)$ το σημείο επαφής και $yy_1 = p(x + x_1)$

$px - yy_1 + px_1 = 0$

$(\varepsilon): \; 3x - yy_1 + 3x_1 = 0$ η εφαπτομένη.

$$d(O, \varepsilon) = \sqrt{3} \iff \frac{|0-0+3x_1|}{\sqrt{9+y_1^2}} = \sqrt{3}$$

$$|3x_1| = \sqrt{3}\sqrt{9+y_1^2} \quad \textbf{(1)}$$

Το σημείο Α ανήκει στην παραβολή $\iff$ $y_1^2 = 6x_1$ **(2)**

$$(1) \overset{(2)}{\iff} |3x_1| = \sqrt{3}\sqrt{9+6x_1} \iff 9x_1^2 = 27 + 18x_1$$

$$x_1^2 - 2x_1 - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ ή } x_1 = -1$$

- Για $x_1 = 3$ η (2) $\iff$ $y_1^2 = 18$ $\iff$ $y_1 = \pm 3\sqrt{2}$

  Οπότε $(\varepsilon): \; 3x - 3\sqrt{2}y + 9 = 0$ ή $3x + 3\sqrt{2}y + 9 = 0$

- Για $x_1 = -1$ η (2) $\iff$ $y_1^2 = -6$ που είναι αδύνατη

4.

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$. Από τυχαίο σημείο της ευθείας $(\delta): x = -2$ φέρουμε δύο εφαπτόμενες στην παραβολή.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία επαφής και να αποδείξετε ότι διέρχεται από την εστία της παραβολής

ii) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$.

Έστω $\Gamma(-2, \alpha)$ τυχαίο σημείο της (δ) από το οποίο φέρουμε τις εφαπτόμενες στην παραβολή και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τα σημεία επαφής.

Οι εφαπτόμενες θα έχουν εξισώσεις $yy_1 = 4(x + x_1)$, $yy_2 = 4(x + x_2)$ αντίστοιχα.

Επειδή διέρχονται από το $\Gamma(-2, \alpha)$, θα ισχύουν

$$\alpha y_1 = 4(-2 + x_1) \quad \text{και} \quad \alpha y_2 = 4(-2 + x_2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha y_1 = -8 + 4x_1 \quad \text{και} \quad \alpha y_2 = -8 + 4x_2 \Leftrightarrow$$

$$-4x_1 + \alpha y_1 = -8 \quad \text{και} \quad -4x_2 + \alpha y_2 = -8$$

Θεωρούμε την ευθεία $-4x + \alpha y = -8$ η οποία επαληθεύεται από τα A, B, άρα είναι η εξίσωση της AB.

Η εστία της παραβολής έχει συντεταγμένες $E(2, 0)$

Προφανώς οι συντεταγμένες της εστίας επαληθεύουν την εξίσωση της AB, οπότε η ευθεία AB διέρχεται από την εστία E.

ii)

Αφού το A βρίσκεται στην παραβολή, έχουμε $y_1^2 = 8x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{8}$

Οπότε η $\alpha y_1 - 4x_1 = -8$ γίνεται $\alpha y_1 - 4\frac{y_1^2}{8} = -8 \Leftrightarrow$

$$y_1^2 - 2\alpha y_1 - 16 = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Ομοίως

$$y_2^2 - 2\alpha y_2 - 16 = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ τα y_1, y_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $y^2 - 2\alpha y - 16 = 0$

Το γινόμενο των ριζών αυτής της είναι $y_1 y_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -16$

Η εφαπτομένη στο A έχει συντ, διεύθυνσης $\lambda_1 = \frac{4}{y_1}$ και στο B έχει $\lambda_2 = \frac{4}{y_2}$

Τότε $\lambda_1\lambda_2 = \frac{16}{y_1 y_2} = \frac{16}{-16} = -1$, άρα οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

5.

Έστω η ευθεία (ε) : $y = \lambda x + 1$ και η παραβολή $x^2 = \dfrac{1}{\lambda^2+1}y$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την παράμετρο p της παραβολής , την εστία και την εξίσωση της διευθετούσας συναρτήσει του λ.

ii) Να δείξτε ότι η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία Α και Β για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Να δείξτε ότι, όταν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ κινείται σ' έναν κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Προτεινόμενη λύση

i)

Από την εξίσωση της παραβολής καταλαβαίνουμε ότι η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Είναι $2p = \dfrac{1}{\lambda^2+1} \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2(\lambda^2+1)}$, άρα $E\left(0,\ \dfrac{p}{2}\right) = E\left(0\,,\ \dfrac{1}{4(\lambda^2+1)}\right)$

και η εξίσωση της διευθετούσας είναι η $y = -\dfrac{p}{2} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4(\lambda^2+1)}$

ii)

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας και της παραβολής λύνουμε το παρακάτω σύστημα των εξισώσεων αυτών των γραμμών

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{\lambda^2+1}y \\ y = \lambda x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{\lambda^2+1}(\lambda x + 1) \\ y = \lambda x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2+1)x^2 - \lambda x - 1 = 0 \\ y = \lambda x + 1 \end{cases}$$

$\Delta = \lambda^2 + 4(\lambda^2 + 1) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 1 = 5\lambda^2 + 1 > 0$, άρα η πρώτη εξίσωση του συστήματος έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως και το σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, που σημαίνει ότι η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία Α, Β για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii)

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Τότε $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ **(1)**

Μας ενδιαφέρει το άθροισμα των ριζών και όχι να βρούμε τις ρίζες

x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $(\lambda^2 + 1)x^2 - \lambda x - 1 = 0$

άρα $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}$

Από τη δεύτερη $y = \lambda x + 1$ εξίσωση του συστήματος βρίσκουμε

$$y_1 + y_2 = \lambda x_1 + 1 + \lambda x_2 + 1 = \lambda(x_1 + x_2) + 2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} + 2 = \frac{3\lambda^2+2}{\lambda^2+1}$$

Τότε οι (1) γίνονται $x_M = \dfrac{\lambda}{2(\lambda^2+1)}$ και $y_M = \dfrac{3\lambda^2+2}{2(\lambda^2+1)}$

Για να βρούμε την γραμμή στην οποία κινείται το Μ θα κάνουμε απαλοιφή του λ .

Λύνουμε την δεύτερη ως προς λ^2 : $\lambda^2 = \dfrac{2 - 2y_M}{2y_M - 3}$ **(2)**

Υψώνουμε την $x_M = \dfrac{\lambda}{2(\lambda^2+1)}$ στο τετράγωνο : $x^2_M = \dfrac{\lambda^2}{4(\lambda^2+1)^2}$

Αντικαθιστούμε όπου λ^2 από τη (2) και μετά τις πράξεις βρίσκουμε

$$x^2_M + y^2_M - \frac{5}{2}y_M + \frac{3}{2} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \dfrac{25}{4} - \dfrac{12}{2} = \dfrac{1}{4} > 0$, η (3) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{4}$

6.

i) Να αναλύσετε σε γινόμενο δύο παραγόντων την παράσταση

$$\Pi = x^2y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 4xy$$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 4xy = 0$ παριστάνει δύο παραβολές, των οποίων να βρείτε τις εστίες και τις διευθετούσες.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\Pi = x^2y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 4xy = x^2(y^2-2x) - 2y(y^2-2x)$$
$$(y^2-2x)(x^2-2y) = 0$$

ii)

$$(y^2-2x)(x^2-2y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2-2x = 0 \ \text{ ή } \ x^2-2y = 0$$
$$y^2 = 2x \ \text{ ή } \ x^2 = 2y$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι εξισώσεις δύο παραβολών C_1, C_2

Είναι $2p_1 = 2 \Rightarrow p_1 = 1$, άρα εστία $E_1\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ και διευθετούσα $x = -\dfrac{1}{2}$

$2p_2 = 2 \Rightarrow p_2 = 1$, άρα εστία $E_2\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ και διευθετούσα $y = -\dfrac{1}{2}$

7.

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που φέρονται από το σημείο $M(0,\ -10)$ και τις συντεταγμένες των σημείων επαφής $A,\ B$.

ii) Αν $A\left(\frac{\sqrt{75}}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{\sqrt{75}}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα A και B

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή στο πρόβλημα ζητούνται και τα σημεία επαφής μας συμφέρει , για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης να δουλέψουμε με τον τύπο $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Έστω $xx_1 + yy_1 = 25$ η εφαπτομένη του κύκλου.

Η εφαπτομένη διέρχεται από το $M(0\ ,-10)$, άρα $-10y_1=25 \Leftrightarrow y_1 = -\frac{5}{2}$ **(1)**

Το A ανήκει στον κύκλο , άρα $x_1^2 + y_1^2 = 25 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^2 + \frac{25}{4} = 25$

$$x_1^2 = \frac{75}{4}$$

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{75}}{2}$$

Άρα οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι : $\pm\frac{\sqrt{75}}{2}x - \frac{5}{2}y = 25$

Και τα σημεία επαφής είναι $A\left(\frac{\sqrt{75}}{2},\ -\frac{5}{2}\right),\ B\left(-\frac{\sqrt{75}}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

ii)

Επειδή τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y η ζητούμενη παραβολή θα έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y , άρα η εξίσωση της παραβολής θα είναι $x^2 = 2py$

Επειδή η παραβολή διέρχεται από το $A\left(\frac{\sqrt{75}}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ θα ισχύει

$$\frac{75}{4} = -2p\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad p = -\frac{15}{4}$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $x^2 = -\frac{15}{2}y$.

8.

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε :

i) Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την εστία της παραβολής και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $2p = 4$, άρα $p = 2$, οπότε $E(1,\ 0)$ και $(\delta):\ x = -1$

i)

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την εστία $E(1, 0)$ έχουν εξίσωση

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad y = \lambda(x-1)$$

Η $x = 1$ προφανώς δεν αποτελεί λύση του προβλήματος αφού η απόσταση της αρχής από αυτήν είναι 1 .

Η $y = \lambda(x-1)$ γράφεται $\lambda x - y - \lambda = 0$

Θέλουμε η απόσταση της από την αρχή να είναι $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{|\lambda\cdot 0 - 1\cdot 0 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2|\lambda| = \sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}$$

$$4\lambda^2 = 2\lambda^2 + 2$$

$$\lambda = \pm 1$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι $y = x - 1$ ή $y = -x + 1$

ii)

Έστω $yy_1 = 2(x + x_1)$ η ζητούμενη εφαπτομένη με $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \dfrac{2}{y_1}$.

Επειδή θέλουμε να είναι παράλληλη στη $y = x - 1$,

θα πρέπει $\lambda_{\varepsilon\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{y_1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 2$.

Το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή,

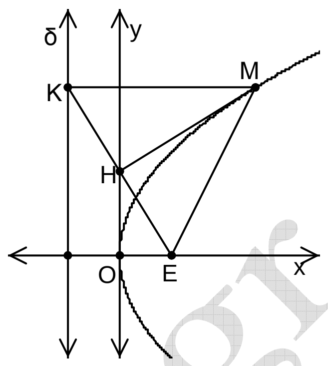
άρα $y_1^2 = 4x_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 = 4x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $2y = 2(x + 1)$, δηλαδή η $y = x + 1$.

9.

Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και το σημείο της Μ διαφορετικό της κορυφής .
Αν Κ είναι η προβολή του Μ στη διευθετούσα (δ) και Ε η εστία , δείξτε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΚΕ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο Μ και διχοτομεί την γωνία $K\hat{M}E$.

Προτεινόμενη λύση Σχόλιο 1δ



Έστω $M(x_1, y_1)$, τότε η εφαπτομένη της παραβολής σε αυτό είναι $yy_1 = p(x + x_1)$

Θα δείξουμε ότι είναι μεσοκάθετη στο ΚΕ .

Είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \dfrac{p}{y_1}$, $E\left(\dfrac{\rho}{2}, 0\right)$ και $K\left(-\dfrac{\rho}{2}, y_1\right)$

Η μέσο του ΚΕ $\Rightarrow$ $x_H = \dfrac{x_K + x_E}{2} = 0$ και $y_H = \dfrac{y_K + y_E}{2} = \dfrac{y_1}{2}$

Ελέγχουμε αν οι συντεταγμένες του Η επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης

$\dfrac{y_1}{2} y_1 = p(x + 0)$ $\Leftrightarrow$ $y_1^2 = 2px_1$ που ισχύει , αφού το Μ ανήκει στην παραβολή.

Άρα το μέσο Η του τμήματος ΚΕ ανήκει στην εφαπτομένη.

Όμως , από τον ορισμό της παραβολής είναι ΜΚ = ΜΕ.

Άρα η διάμεσος ΜΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΜΚΕ είναι διχοτόμος και ύψος.

10.

Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $M\left(\frac{1}{4},\ 1\right)$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο M

ii) Αν η εφαπτομένη στο M τέμνει τη διευθετούσα στο K και E είναι η εστία της παραβολής, δείξτε ότι $KE \perp ME$.

iii) Αν η ME τέμνει την παραβολή στο N και η κάθετη της MN στο N τέμνει την εφαπτομένη (ε) στο P, δείξτε ότι το μέσο του τμήματος NP ανήκει στη διευθετούσα .

Προτεινόμενη λύση

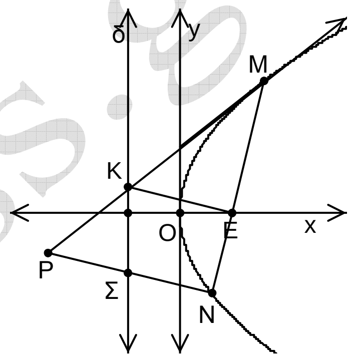
Ακολουθούμε βήμα – βήμα την εκφώνηση

i)

Είναι $2p = 4$, άρα $p = 2$, οπότε $E(1,\ 0)$ και $(\delta):\ x = -1$

Η (ε) έχει εξίσωση $y \cdot 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)$

$$y = 2x + \frac{1}{2}$$



ii)

Λύνοντας το σύστημα των (δ), (ε) βρίσκουμε τις συντεταγμένες του K : $K\left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$.

$$\lambda_{KE} = \frac{y_E - y_K}{x_E - x_K} = \frac{0 + \frac{3}{2}}{1+1} = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \lambda_{ME} = \frac{y_E - y_M}{x_E - x_M} = \frac{0-1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$\lambda_{ME} \cdot \lambda_{KE} = -1 \quad \Rightarrow \quad ME \perp KE$.

iii)

Η ME έχει εξίσωση : $y - y_E = \lambda_{ME}(x - x_E)$

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Λύνοντας το σύστημα ME – παραβολή, βρίσκουμε ότι $N(4,\ -4)$

$N\Pi \perp NM \quad \Rightarrow \quad \lambda_{NP} \cdot \lambda_{NM} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{NP} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{NP} = \frac{3}{4}$

Εξίσωση της NP : $y - y_N = \frac{3}{4}(x - x_N) \quad \Leftrightarrow \quad :$

$$y + 4 = \frac{3}{4}(x - 4)$$

$$3x - 4y = 28$$

Λύνοντας το σύστημα των NP – (ε) βρίσκουμε $P\left(-6,\ -\frac{23}{2}\right)$

Σ μέσο του NP $\quad \Leftrightarrow \quad x_\Sigma = \frac{x_N + x_P}{2} = \frac{4-6}{2} = -1$ και

$$y_\Sigma = \frac{y_N + y_P}{2} \;=\; x_\Sigma = \frac{-4-\frac{23}{2}}{2} \;=\; -\frac{31}{4}$$

Αφού $x_\Sigma = -1$, επαληθεύει την εξίσωση $x = -1$ της διευθετούσας, άρα το Σ ανήκει σε αυτή .

11.

Έστω η παραβολή $y^2 = 8x$ και το σημείο $M(4,\ 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το Μ και τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Β έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το Μ έχουν εξισώσεις

$$x = 4 \quad ή \quad y-1 = \lambda(x-4)$$

- Για την $x = 4$

  Λύνουμε το σύστημα της $x = 4$ με την παραβολή και βρίσκουμε

  $$A(4,\ \sqrt{32}) \quad και \quad B(4,\ -\sqrt{32})$$

  $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\sqrt{32}-\sqrt{32}}{2} = 0 \neq 1$, άρα η ευθεία $x = 4$ δεν αποτελεί λύση.

- Για την $y-1 = \lambda(x-4)$, ($\lambda \neq 0$ ώστε να τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία)

  $$y-1 = \lambda x - 4\lambda$$

  $$y-1+4\lambda = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y-1+4\lambda}{\lambda}$$

  Η $y^2 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 8\frac{y-1+4\lambda}{\lambda}$

  $$\lambda y^2 - 8y + 8 - 32\lambda = 0$$

  $$y_A + y_B = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{8}{\lambda}$$

  Αλλά Μ μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow$ $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ και $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

  $$2x_M = x_A + x_B \quad και \quad 2\cdot 1 = \frac{8}{\lambda}$$

  $$2x_M = x_A + x_B \quad και \quad \lambda = 4$$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η $y-1 = 4(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad y = 4x-15$

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής

Έστω $A(x_A\ ,\ y_A)$ και $B(x_B\ ,\ y_B)$. Αφού τα Α και Β ανήκουν στην παραβολή έχουμε

$y_A^2 = 8x_A$ και $y_B^2 = 8x_B$ οπότε $y_B^2 - y_A^2 = 8(x_B - x_A) \quad \Leftrightarrow$

$$(y_B - y_A)(y_B + y_A) = 8(x_B - x_A) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8}{y_B + y_A} \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \frac{8}{2y_M} = \frac{8}{2\cdot 1} = 4$$

Οπότε ΑΒ : $y-1 = 4(x-4) \Leftrightarrow y = 4x-15$

12.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{1}{16}$ τετραγωνικές μονάδες .

Προτεινόμενη λύση

$2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$

Αν $M(x_1 , y_1)$ είναι το σημείο επαφής η εφαπτομένη σ' αυτό θα έχει εξίσωση

$$yy_1 = 2(x + x_1)$$

Τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες είναι τα

$$A(-x_1, 0) \quad \text{και} \quad B\left(0, \frac{2x_1}{y_1}\right)$$

$$(AOB) = \frac{1}{2}OA \cdot OB \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} = \frac{1}{2}|-x_1|\cdot\left|\frac{2x_1}{y_1}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} = \frac{x_1^2}{|y_1|} \quad \Leftrightarrow \quad |y_1| = 16x_1^2 \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή το $M(x_1 , y_1)$ ανήκει στην παραβολή έχουμε $y_1^2 = 4x_1$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $x_1 = \frac{1}{4}$ και $y_1 = \pm 1$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y \cdot 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)$ ή $y(-1) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)$

$$y = 2x + \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad y = -2x - \frac{1}{2}$$

13.

Έστω η παραβολή $y^2 = 6x$. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 5x + 1$ βρίσκονται σε σταθερή ευθεία.

Προτεινόμενη λύση

Η οποιαδήποτε χορδή της παραβολής παράλληλη στην $y = 5x + 1$ έχει εξίσωση

$$y = 5x + \kappa \qquad \textbf{(1)}$$

Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ είναι τα σημεία τομής της (1) με την παραβολή , τότε το μέσο M της χορδής AB έχει συντεταγμένες

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_B = \frac{y_A + y_B}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_A + x_B = 2x_M, \qquad y_A + y_B = 2y_M \qquad \textbf{(2)}$$

Τα A και B ανήκουν στην παραβολή $\Rightarrow$ $y_A^2 = 6x_A$ και $y_B^2 = 6x_B$

$$y_A^2 - y_B^2 = 6(x_A - x_B)$$

$$(y_A + y_B)(y_A - y_B) = 6(x_A - x_B)$$

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{6}{y_A + y_B} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{6}{2y_M}$$

$$5 = \frac{3}{y_M} \quad \Rightarrow \quad y_M = \frac{3}{5}$$

Που σημαίνει ότι το M βρίσκεται στην ευθεία $y = \frac{3}{5}$

14.

Έστω η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$. Μία χορδή AB αυτής κάθετη στον άξονα συμμετρίας της έχει μήκος 8α . Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

Προτεινόμενη λύση

Αφού η χορδή AB έχει μήκος 8α και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα $x'x$ τα σημεία A και B θα είναι τα

$$A(x_o, 4\alpha) \quad \text{και} \quad B(x_o, -4\alpha)$$

Τότε $\overrightarrow{OA} = (x_o, 4\alpha)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_o, -4\alpha)$, οπότε $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_o^2 - 16\alpha^2$ **(1)**

Επειδή το A ανήκει στην παραβολή θα έχουμε $(4\alpha)^2 = 4\alpha x_o \Leftrightarrow x_o = 4\alpha$

Επομένως η (1) γίνεται $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 16\alpha^2 - 16\alpha^2 = 0$

15.

Αν ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΟΒ (Ο η αρχή των αξόνων) είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = x$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $y_1^2 = x_1$ **(1)** και $y_2^2 = x_2$ **(2)**

$$OA = OB \Leftrightarrow (OA)^2 = (OB)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$$

$$x_1^2 + x_1 - x_2^2 - x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad ή \quad x_1 + x_2 + 1 = 0$$

$$x_1 = x_2 \quad ή \quad x_1 + x_2 = -1$$

Αλλά, από τις (1) και (2) έχουμε $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$.

Άρα η $x_1 + x_2 = -1$ είναι αδύνατη

Είναι λοιπόν $x_1 = x_2$. **(3)**

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ $y_1^2 = y_2^2$ $\Rightarrow$ $y_1 = y_2$ ή $y_1 = -y_2$

Η $y_1 = y_2$ απορρίπτεται, διότι θα συνέπιπταν τα Α, Β.

Άρα είναι $y_1 = -y_2$ **(4)**

$$AB = OA \Leftrightarrow (AB)^2 = (OA)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$-2x_1 x_2 + x_2^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2 = 0 \overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$-2x_1 \cdot x_1 + x_1^2 - 2y_1(-y_1) + y_1^2 = 0$$

$$-x_1^2 + 3y_1^2 = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$-x_1^2 + 3x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

Άρα $x_2 = 3$, $y_1 = \sqrt{3}$, $y_2 = -\sqrt{3}$