3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Ονομάζουμε **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία Ε΄ και Ε, το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε΄ και Ε είναι σταθερό και μεγαλύτερο του Ε΄Ε.

2.

Άμεση συνέπεια

(ΜΕ΄) + (ΜΕ) = 2α $\Leftrightarrow$ Ο γ.τ του σημείου Μ είναι έλλειψη με εστίες Ε΄ και Ε.

Περιορισμός : Αν (Ε′Ε) = 2γ, πρέπει γ < α

3.

Εξίσωση έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma,\ 0)$, $E(\gamma,\ 0)$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

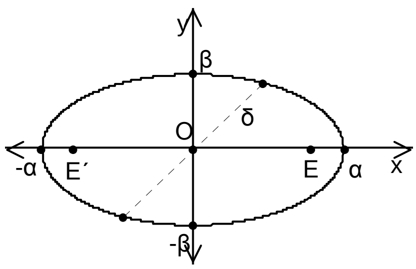
4.

Εξίσωση έλλειψης με εστίες $E'(0,\ -\gamma)$, $E(0,\ \gamma)$

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

5.

Ιδιότητες από το σχήμα



i) Εστίες στον άξονα x′x

ii) Σημεία τομής με τον άξονα x′x

iii) Σημεία τομής με τον άξονα y′y

iv) Συμμετρική ως προς τον άξονα x′x
ως προς τον άξονα y′y
ως προς την αρχή Ο

v) Σχέσεις μεγεθών : $2\beta \le \delta \le 2\alpha$, $-\alpha \le x \le \alpha$, $-\beta \le y \le \beta$

6.

Εκκεντρότητα

i) $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} < 1$, αποδεικνύεται ότι : $\dfrac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$ **(1)**

ii) Ελλείψεις με ίδια εκκεντρότητα ονομάζονται **όμοιες**

iii) Όταν $\varepsilon \to 0$, τότε από την (1) $\dfrac{\beta}{\alpha} \to 1$ δηλαδή $\beta \to \alpha$, οπότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος

iv) Όταν $\varepsilon \to 1$, τότε από την (1) $\dfrac{\beta}{\alpha} \to 0$, δηλαδή $\beta \to 0$, οπότε η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα

7.

Εφαπτομένη

$\dfrac{xx_1}{\alpha^2} + \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$, όπου $M(x_1 , y_1)$ το σημείο επαφής.

8.

Μια ιδιότητα

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\widehat{M}E$, όπου Ε΄ και Ε οι εστίες της έλλειψης

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Το πρόσημο των παραμέτρων

Σε κάθε έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ οι α, β, γ είναι > 0

2.

Κάτι προφανές αλλά χρήσιμο

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

3.

Εμπειρικός κανόνας

Στην εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}=1$:

- Αν $\kappa > \lambda$, τότε οι εστίες βρίσκονται στον άξονα των x
.
- Αν $\lambda > \kappa$, τότε οι εστίες βρίσκονται στον άξονα των y

.

4.

Ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης έλλειψης

$$\beta^2 x^2+\alpha^2 y^2= \alpha^2 \beta^2$$

5.

Ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης εφαπτομένης

$$\beta^2 x_1 x +\alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$$

6.

Μέθοδος

Για εφαπτομένη από σημείο Κ που δεν ανήκει στην έλλειψη :
Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο επαφής $M(x_1 , y_1)$ και την επαληθεύουμε από το Κ.

7.

Γενική μέθοδος

Για την επίλυση του μεγάλου όγκου των προβλημάτων :

α) Θεωρούμε τους απαραίτητους αγνώστους.
β) Μετατρέπουμε τις υποθέσεις του προβλήματος σε εξισώσεις
γ) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων
δ) Ακολουθούμε βήμα – βήμα την εκφώνηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Μια έλλειψη έχει κέντρο συμμετρίας το O(0, 0) και διέρχεται από τα σημεία

$$M\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ και } \Lambda\left(\sqrt{2}\ ,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι οι εστίες της ανήκουν στον άξονα $x'x$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\frac{x^2}{\kappa^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}=1$ η εξίσωση της έλλειψης.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\kappa > \lambda$.

Σχόλιο 3

M ανήκει στην έλλειψη $\Leftrightarrow \frac{1^2}{\kappa^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\lambda^2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\kappa^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^2}=1$ **(1)**

Λ ανήκει στην έλλειψη $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{\kappa^2}+\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\lambda^2}=1 \Leftrightarrow 2\frac{1}{\kappa^2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^2}=1$ **(2)**

Στις (1), (2) θέτουμε $\frac{1}{\kappa^2}=\omega$ και $\frac{1}{\lambda^2}=\varphi$.

Προκύπτει το σύστημα $\begin{cases}\omega+\frac{3}{4}\varphi=1\\ 2\omega+\frac{1}{2}\varphi=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega+\frac{3}{4}\varphi=1\\ 2\omega+\frac{1}{2}\varphi=1\end{cases}$

$$\begin{cases}4\omega+3\varphi=4\\ 4\omega+\varphi=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-)\ \ 2\varphi=2\\ \quad\ \ 4\omega+\varphi=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi=1\\ 4\omega+1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi=1\\ \omega=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Άρα $\frac{1}{\kappa^2}=\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{\lambda^2}=1 \Leftrightarrow \kappa^2=4=2^2$ και $\lambda^2=1=1^2$, οπότε $\kappa>\lambda$

και εξίσωση της έλλειψης γίνεται $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$

2.

Να δείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda^2}+\frac{y^2}{\beta^2+\lambda^2}=1$ με $\alpha>\beta$ έχουν τις ίδιες εστίες

Προτεινόμενη λύση

- Για την πρώτη έλλειψη

  Σχόλιο 3

  Αφού $\alpha>\beta$, οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x΄x.

  Έστω λοιπόν $E΄(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ οι εστίες της, όπου $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

  $$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2 \quad \textbf{(1)}$$

- Για τη δεύτερη έλλειψη

  $\alpha>\beta \;\Rightarrow\; \alpha^2>\beta^2 \;\Rightarrow\; \alpha^2+\lambda^2>\beta^2+\lambda^2$

  Άρα οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x΄x.

  Έστω λοιπόν $\Delta΄(-\delta, 0)$ και $\Delta(\delta, 0)$ οι εστίες της,

  όπου $\beta^2+\lambda^2=\alpha^2+\lambda^2-\delta^2$

  $$\beta^2=\alpha^2-\delta^2$$

  $$\delta^2=\alpha^2-\beta^2 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\delta^2=\gamma^2$ $\Rightarrow$ $\delta=\gamma$

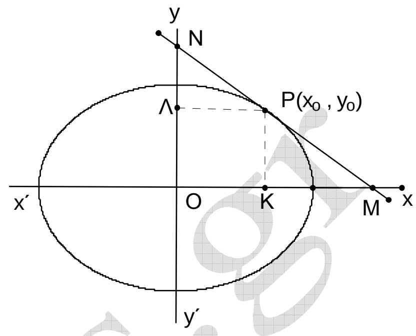
Άρα οι εστίες τους συμπίπτουν αντίστοιχα.

3.

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Σε σημείο της $P(x_o, y_o)$ φέρουμε την εφαπτομένη της (ε), η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο M και τον $y'y$ σε σημείο N. Αν K, Λ είναι οι προβολές του P στον $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, δείξτε ότι

$(OK)\cdot(OM)=\alpha^2$ και $(O\Lambda)\cdot(ON)=\beta^2$.

Προτεινόμενη λύση



Είναι $(\varepsilon): \frac{xx_o}{\alpha^2}+\frac{yy_o}{\beta^2}=1$

Για $x=0$ δίνει $y=\frac{\beta^2}{y_0} \Rightarrow N\left(0, \frac{\beta^2}{y_o}\right)$

Για $y=0$ δίνει $x=\frac{\alpha^2}{x_0} \Rightarrow M\left(\frac{\alpha^2}{x_o}, 0\right)$

Οπότε $OK=|x_o|$, $O\Lambda=|y_o|$, $OM=\left|\frac{\alpha^2}{x_o}\right|$ και $ON=\left|\frac{\beta^2}{y_o}\right|$

Άρα $(OK)\cdot(OM)=|x_o|\cdot\left|\frac{\alpha^2}{x_o}\right|=|\alpha^2|=\alpha^2$

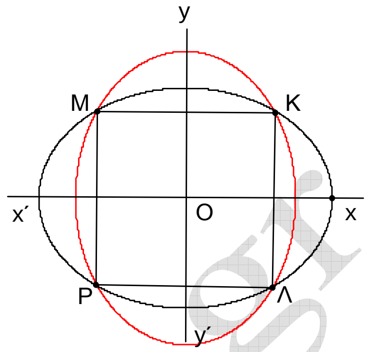
$(O\Lambda)\cdot(ON)=|y_o|\cdot\left|\frac{\beta^2}{y_o}\right|=|\beta^2|=\beta^2$

4.

Δείξτε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ και $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

είναι κορυφές τετραγώνου με πλευρές παράλληλες στους άξονες .
Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου ;

Προτεινόμενη λύση



Οι εξισώσεις των ελλείψεων δίνουν το σύστημα

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$
$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$x^2 = \frac{144}{25} \quad \text{και} \quad y^2 = \frac{144}{25} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{12}{5} \quad \text{και } y = \pm\frac{12}{5}$$

Άρα τα σημεία τομής των ελλείψεων είναι τα

$$K\left(\frac{12}{5}\ ,\frac{12}{5}\right),\quad \Lambda\left(\frac{12}{5}\ ,-\frac{12}{5}\right),\quad M\left(-\frac{12}{5}\ ,\frac{12}{5}\right),\quad P\left(-\frac{12}{5}\ ,-\frac{12}{5}\right)$$

τετράπλευρο ΚΛΡΜ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι τετράγωνο με πλευρές παράλληλες στους άξονες και μήκος πλευράς $\frac{24}{5}$.

5.

Έστω η παραβολή $y^2 = 12x$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Να βρείτε τα α, β ώστε η έλλειψη να διέρχεται από το σημείο (0, 4) και μία εστία της να συμπίπτει με την εστία της παραβολής .

Προτεινόμενη λύση

Για την παραβολή έχουμε ότι

$2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$, οπότε η εστία της παραβολής είναι Ε(3, 0)

Μία εστία της έλλειψης θα είναι το Ε, οπότε $\gamma = 3$

Η έλλειψη διέρχεται από το (0, 4) $\Leftrightarrow \frac{0^2}{\alpha^2}+\frac{4^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{16}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \beta = 4$

Αλλά $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow 16 = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow \alpha = 5$

6.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 4$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o .

Προτεινόμενη λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη (ε) σε αυτό έχει εξίσωση

$$xx_1 + 4yy_1 = 4 \quad \text{με} \quad \lambda_\varepsilon = -\frac{x_1}{4y_1}$$

$$\varepsilon\varphi 45^o = -\frac{x_1}{4y_1}$$

$$1 = -\frac{x_1}{4y_1} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -4y_1 \quad \textbf{(1)}$$

Μ ανήκει στην έλλειψη $\Leftrightarrow$ $x_1^2 + 4y_1^2 = 4$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ και $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

ή $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ και $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Οπότε οι ζητούμενη εφαπτομένη είναι $\frac{4}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}}y = 4$

ή $-\frac{4}{\sqrt{5}}x + \frac{4}{\sqrt{5}}y = 4$

7.
Στην έλλειψη $x^2 + 5y^2 = 20$ να βρεθεί σημείο Μ για το οποίο ισχύει $ME' \perp ME$, όπου Ε΄ και Ε οι εστίες της έλλειψης .

Προτεινόμενη λύση

$x^2 + 5y^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$

Σχόλιο 4

Είναι $\gamma^2 = 20 - 4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 4$. Επομένως $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$

Αν Μ (x, y) ζητούμενο σημείο, τότε $ME' \perp ME \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ME'} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$ **(1)**

Όμως $\overrightarrow{ME'} = (-4 - x, -y)$ και $\overrightarrow{ME} = (4 - x, -y)$

(1) $\Leftrightarrow$ $(-4 - x)(4 - x) + y^2 = 0$

$16 - x^2 = y^2$ **(2)**

Μ ανήκει στην έλλειψη $\Leftrightarrow$ $x^2 + 5y^2 = 20$ **(3)**

Λύνοντας το σύστημα των (2) , (3) βρίσκουμε $x = \pm\sqrt{15}$ και $y = \pm 1$

Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα

$M_1(\sqrt{15}, 1)$, $M_2(\sqrt{15}, -1)$, $M_3(-\sqrt{15}, 1)$, $M_4(-\sqrt{15}, -1)$

8.

Έστω η έλλειψη $9x^2 + 16y^2 = 144$. Να βρείτε

i) Τους άξονες , τις εστίες , την εκκεντρότητα και τις κορυφές .

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο $P(5, 0)$ και να αποδείξτε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες .

Προτεινόμενη λύση

i)

$9x^2 + 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$16 > 9 \Rightarrow$ ο μεγάλος άξονας είναι τμήμα του $x'x$

Είναι $\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$

Άρα ο μεγάλος άξονας είναι $2\alpha = 8$ και ο μικρός άξονας είναι $2\beta = 6$

Κορυφές είναι τα σημεία $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$, $B'(0, -3)$, $B(0, 3)$

Είναι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16 - 9 = 7 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{7}$

Άρα οι εστίες είναι $E'(-\sqrt{7}, 0)$ και $E(\sqrt{7}, 0)$ και η εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ii)

Αν $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη σ' αυτό είναι η

$$9xx_1 + 16yy_1 = 144$$

Σχόλιο 5

Επειδή θέλουμε η εφαπτομένη σ' αυτό να διέρχεται από το $P(5, 0)$,

θα πρέπει $9 \cdot 5x_1 + 16 \cdot 0\, y_1 = 144 \Leftrightarrow x_1 = \frac{16}{5}$ **(1)**

Όμως το M ανήκει στην έλλειψη, άρα $9x_1^2 + 16y_1^2 = 144$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1) , (2) βρίσκουμε $x_1 = \frac{16}{5}$ και $y_1 = \pm\frac{9}{5}$

Οπότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι $(\varepsilon_1): \frac{144}{5}x + \frac{144}{5}y = 144 \Leftrightarrow y = -x + 5$

ή $(\varepsilon_2): \frac{144}{5}x - \frac{144}{5}y = 144 \Leftrightarrow y = x - 5$

Είναι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (-1) . 1 = -1 \Rightarrow$ οι εφαπτόμενες είναι κάθετες

9.

Έστω η έλλειψη $4x^2 + 5y^2 = 20$

i) Δείξτε ότι το σημείο $M(\sqrt{5}\,συνθ\ ,\ 2ημθ)$ ανήκει στην έλλειψη

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο M

iii) Αν το M δεν είναι κορυφή της έλλειψης και η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο Γ, δείξτε ότι $\dfrac{|\overrightarrow{ΕΓ}|}{|\overrightarrow{ΕΜ}|} = ε$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης και Ε μία εστία της.

Προτεινόμενη λύση

i)

Ελέγχουμε αν το M επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης

$4(\sqrt{5}\,συνθ)^2 + 5(2ημθ)^2 = 20 \iff 20συν^2θ + 20\,ημ^2θ = 20$

$συν^2θ + ημ^2θ = 1$ που ισχύει

Άρα το σημείο M ανήκει στην έλλειψη

ii)

Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $4x(\sqrt{5}\,συνθ\,) + 5y(2ημθ) = 20$ Σχόλιο 5

$4\sqrt{5}\,xσυνθ + 10y\,ημθ = 20$

με $λ_{εφ} = -\dfrac{4\sqrt{5}συνθ}{10ημθ}$

iii)

Η κάθετη στην εφαπτομένη στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ' = \dfrac{10ημθ}{4\sqrt{5}συνθ}$

επομένως έχει εξίσωση $y - 2ημθ = \dfrac{10ημθ}{4\sqrt{5}συνθ}(x - \sqrt{5}\,συνθ)$

$$y = \frac{10ημθ}{4\sqrt{5}συνθ}x - \frac{ημθ}{2}$$

Για $y = 0$ βρίσκουμε $Γ\left(\dfrac{\sqrt{5}συνθ}{5},\ 0\right)$

Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται $4x^2 + 5y^2 = 20 \iff \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Απ' όπου $α^2 = 5$ και $β^2 = 4$, άρα $γ^2 = 5 - 4 = 1$

$γ = 1 \Rightarrow Ε(1,\ 0)$

Τότε $\overrightarrow{ΕΓ} = \left(\dfrac{\sqrt{5}συνθ}{5} - 1,\ 0\right)$ με $|\overrightarrow{ΕΓ}| = 1 - \dfrac{\sqrt{5}συνθ}{5}$

και $\quad \overrightarrow{EM} = \left(\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta - 1,\ 2\eta\mu\theta\right)$ $\quad$ με $\quad |\overrightarrow{EM}| = \sqrt{(\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta - 1)^2 + (2\eta\mu\theta)^2}$

$$= \sqrt{5\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta + 1 + 4\eta\mu^2\theta}$$

$$= \sqrt{4\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta + 1 + 4\eta\mu^2\theta}$$

$$= \sqrt{4(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta + 1}$$

$$= \sqrt{5 + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} - \sigma\upsilon\nu\theta)^2} = \sqrt{5} - \sigma\upsilon\nu\theta$$

Επομένως $\quad \dfrac{|\overrightarrow{E\Gamma}|}{|\overrightarrow{EM}|} = \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta}{5}}{\sqrt{5} - \sigma\upsilon\nu\theta} = \dfrac{5 - \sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\theta}{5(\sqrt{5} - \sigma\upsilon\nu\theta)} = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sigma\upsilon\nu\theta)}{5(\sqrt{5} - \sigma\upsilon\nu\theta)} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Επειδή $\alpha^2 = 5 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{5}$, η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ άρα $\dfrac{|\overrightarrow{E\Gamma}|}{|\overrightarrow{EM}|} = \varepsilon$

10.

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$ με $p > 0$. Δείξτε ότι

i) Οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι $E\left(0,\ \frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$, $E'\left(0,\ -\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$

ii) Τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι $K\left(\frac{p}{2},\ p\right)$, $\Lambda\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$

iii) Οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο Κ είναι κάθετες.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$4x^2 + 2y^2 = 3p^2 \iff \frac{4x^2}{3p^2} + \frac{2y^2}{3p^2} = 1 \iff \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3p^2}{2}} = 1$$

Επειδή $\frac{3p^2}{2} > \frac{3p^2}{4}$, ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι τμήμα του άξονα $y'y$

$\alpha^2 = \frac{3p^2}{2}$ και $\beta^2 = \frac{3p^2}{4}$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \frac{3p^2}{2} - \frac{3p^2}{4} = \frac{3p^2}{4}$ άρα $\gamma = \frac{p\sqrt{3}}{2}$

Εστίες λοιπόν είναι τα σημεία $E\left(0,\ \frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$ και $E'\left(0,\ -\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$

ii)

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 = 3p^2 \\ y^2 = 2px \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 + 4px - 3p^2 = 0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$

Η εξίσωση $4x^2 + 4px - 3p^2 = 0 \iff x = \frac{p}{2}$ ή $x = \frac{-3p}{2}$

Για $x = \frac{p}{2}$, η $y^2 = 2px$ δίνει $y = \pm p$

Για $x = \frac{-3p}{2}$, η $y^2 = 2px$ δίνει $y^2 = -3p^2$ αδύνατη

Άρα τα σημεία τομής των δύο κωνικών είναι $K\left(\frac{p}{2},\ p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$

iii)

Εφαπτομένη της παραβολής στο Κ (ε) : $yy_1 = p(x + x_1)$

$$yp = p\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

$$y = x + \frac{p}{2} \quad \text{με} \quad \lambda = 1$$

Εφαπτομένη της έλλειψης στο Κ (η) : $4xx_1 + 2yy_1 = 3p^2$

$$2px + 2py = 3p^2 \quad \text{με} \quad \lambda' = -1$$

Επειδή $\lambda \cdot \lambda' = -1$, οι εφαπτόμενες είναι κάθετες

11.

Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες $E'(-3,\ 0)$, $E(3,\ 0)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x - 5$.

Προτεινόμενη λύση

Η έλλειψη θα έχει εξίσωση της μορφής $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\gamma = 3$

Η εφαπτομένη σε σημείο $M(x_1,\ y_1)$ είναι $\dfrac{xx_1}{\alpha^2}+\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1$

$$xx_1\beta^2+yy_1\alpha^2 = \alpha^2\beta^2$$

$$y = -\frac{xx_1\beta^2}{\alpha^2 y_1}+\frac{\beta^2}{y_1}$$

Για να ταυτίζεται με την $y = x - 5$ πρέπει $-\dfrac{x_1\beta^2}{\alpha^2 y_1} = 1$ και $\dfrac{\beta^2}{y_1} = -5$

$$\frac{5x_1}{\alpha^2}=1 \quad \text{και} \quad \frac{\beta^2}{y_1}=-5$$

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{5} \quad \text{και } y_1 = -\frac{\beta^2}{5}$$

Μ ανήκει στην ευθεία $y = x - 5 \iff -\dfrac{\beta^2}{5}=\dfrac{\alpha^2}{5}-5 \iff \alpha^2+\beta^2 = 25$ **(1)**

Όμως είναι $\beta^2 = \alpha^2-\gamma^2 \iff \beta^2 = \alpha^2-9$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\alpha^2 = 17$ και $\beta^2 = 8$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$

12.

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης $4x^2 + 9y^2 = 36$, η οποία έχει μέσο το σημείο $M(2, 1)$

Προτεινόμενη λύση

Αν $A(x_\alpha , y_\alpha)$ και $B(x_\beta , y_\beta)$ είναι τα άκρα της χορδής που έχει μέσο το $M(2, 1)$,

τότε $\dfrac{x_\alpha + x_\beta}{2} = 2$ και $\dfrac{y_\alpha + y_\beta}{2} = 1$

$x_\alpha + x_\beta = 4$ και $y_\alpha + y_\beta = 2$ **(1)**

Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{y_\alpha - y_\beta}{x_\alpha - x_\beta}$ **(2)** (είναι $x_\alpha \neq x_\beta$, αφού η ΑΒ δεν είναι κατακόρυφη, δεδομένου ότι το Μ δεν βρίσκεται στον άξονα των x)

Α και Β ανήκουν στην έλλειψη $\Rightarrow$ $4x_\alpha^2 + 9y_\alpha^2 = 36$ και $4x_\beta^2 + 9y_\beta^2 = 36$

Αφαιρώντας κατά μέλη $\Rightarrow$ $4(x_\alpha + x_\beta)(x_\alpha - x_\beta) + 9(y_\alpha + y_\beta)(y_\alpha - y_\beta) = 0$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 16(x_\alpha - x_\beta) + 18(y_\alpha - y_\beta) = 0$$

$$16(x_\alpha - x_\beta) = -18(y_\alpha - y_\beta)$$

$$\frac{y_\alpha - y_\beta}{x_\alpha - x_\beta} = -\frac{8}{9} \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_{AB} = -\frac{8}{9}$$

Οπότε η ΑΒ, αφού διέρχεται από το Μ έχει εξίσωση $y - 1 = -\dfrac{8}{9}(x - 2)$

$$y = -\frac{8}{9}x + \frac{25}{9}$$

13.

Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $C_2: \frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2}=1$

είναι όμοιες. (Δίνεται ότι $\alpha > \beta > 0$)

Προτεινόμενη λύση

Η εκκεντρότητα της C_1 είναι $\varepsilon_1=\frac{\gamma_1}{\alpha}$ όπου $\gamma_1^2=\alpha^2-\beta^2$

$$\varepsilon_1^2=\frac{\gamma_1^2}{\alpha^2} \quad \text{όπου} \quad \gamma_1^2=\alpha^2-\beta^2$$

$$\varepsilon_1^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2} \quad \textbf{(1)}$$

Η C_2 γράφεται $\frac{x^2}{\frac{\alpha^2}{\kappa^2}}+\frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\kappa^2}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2}=1$

Η εκκεντρότητα της C_2 είναι $\varepsilon_2=\frac{\gamma_2}{\frac{\alpha}{\kappa}}$ όπου $\gamma_2^2=\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2$

$$\varepsilon_2=\frac{\kappa\gamma_2}{\alpha} \quad \text{όπου} \quad \gamma_2^2=\frac{\alpha^2}{\kappa^2}-\frac{\beta^2}{\kappa^2}$$

$$\varepsilon_2^2=\frac{\kappa^2\gamma_2^2}{\alpha^2} \quad \text{όπου} \quad \gamma_2^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\kappa^2}$$

$$\varepsilon_2^2=\frac{\kappa^2\gamma_2^2}{\alpha^2} \quad \text{όπου} \quad \kappa^2\gamma_2^2=\alpha^2-\beta^2$$

$$\varepsilon_2^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2} \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, άρα ελλείψεις όμοιες.

14.

Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων

$C_1:\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\quad C_2:\ \frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}=1$ με $\alpha>\beta>0$

Προτεινόμενη λύση

Η εκκεντρότητα της C_1 είναι $\varepsilon_1=\frac{\gamma_1}{\alpha}$ όπου $\gamma_1^2=\alpha^2-\beta^2$

$$\varepsilon_1^2=\frac{\gamma_1^2}{\alpha^2}\quad \text{όπου}\quad \gamma_1^2=\alpha^2-\beta^2$$

$$\varepsilon_1^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\qquad \textbf{(1)}$$

Η C_2 γράφεται $\frac{x^2}{(\alpha^2)^2}+\frac{y^2}{(\beta\ )^2}=1$

Η εκκεντρότητα της C_2 είναι $\varepsilon_2=\frac{\gamma_2}{\alpha^2}$ όπου $\gamma_2^2=(\alpha^2)^2-(\beta^2)^2$

$$\varepsilon_2^2=\frac{\gamma_2^2}{\alpha^4}\quad \text{όπου}\quad \gamma_2^2=\alpha^4-\beta^4$$

$$\varepsilon_2^2=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^4}\qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{(2)}{(1)}\ \Rightarrow\ \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}=\frac{\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^4}}{\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}=1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}>1$$

Άρα $\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}>1\ \Rightarrow\ \varepsilon_2^2>\varepsilon_1^2\ \Rightarrow\ \varepsilon_2>\varepsilon_1$

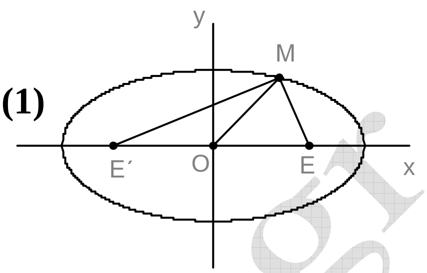
15.

Για το τυχαίο σημείο Μ της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, να αποδείξετε ότι

$$(ΜΕ΄)\,(ΜΕ) + (ΜΟ)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

όπου Ε΄, Ε είναι οι εστίες της έλλειψης και Ο η αρχή των αξόνων.

Προτεινόμενη λύση



Είναι $(ΜΕ΄) + (ΜΕ) = 2\alpha \Rightarrow$

$$[(ΜΕ΄) + (ΜΕ)]^2 = 4\alpha^2$$

$$(ΜΕ΄)^2 + (ΜΕ)^2 + 2(ΜΕ΄)\,(ΜΕ) = 4\alpha^2 \quad \textbf{(1)}$$

$1^{ο}$ Θ. Διαμέσων στο τρίγωνο ΜΕ΄Ε

$$(ΜΕ΄)^2 + (ΜΕ)^2 = 2(ΜΟ)^2 + \frac{(Ε΄Ε)^2}{2}$$

$$= 2(ΜΟ)^2 + \frac{(2\gamma)^2}{2}$$

$$= 2(ΜΟ)^2 + 2\gamma^2$$

Η (1) $\Rightarrow$ $2(ΜΟ)^2 + 2\gamma^2 + 2(ΜΕ΄)\,(ΜΕ) = 4\alpha^2$

$$(ΜΟ)^2 + \gamma^2 + (ΜΕ΄)\,(ΜΕ) = 2\alpha^2$$

$$(ΜΟ)^2 + (ΜΕ΄)\,(ΜΕ) = 2\alpha^2 - \gamma^2 \quad \text{αλλά} \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Οπότε $(ΜΟ)^2 + (ΜΕ΄)\,(ΜΕ) = 2\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)$

$$= 2\alpha^2 - \alpha^2 + \beta^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2$$

16.

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με εστίες Ε(γ, 0), Ε΄(– γ, 0).

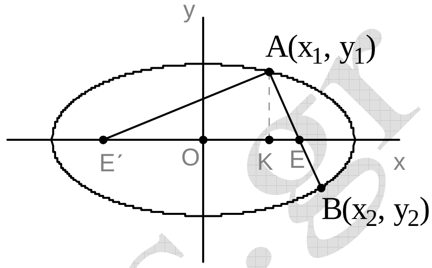
i) Για το τυχαίο σημείο της $A(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι $(AE) = \alpha - \frac{\gamma x_1}{\alpha}$

ii) Χορδή ΑΒ της έλλειψης (Α ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο και Β στο 4ο) διέρχεται από την εστία Ε και έχει μέσο $M(x_o, y_o)$.

Να αποδείξετε ότι $(AB) = 2\left(\alpha - \frac{\gamma x_o}{\alpha}\right)$

Προτεινόμενη λύση

i)



2ο Θ. Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΕ΄Ε

$(AE')^2 - (AE)^2 = 2(E'E)(OK) \quad \Rightarrow$

$\left[(AE') + (AE)\right]\left[(AE') - (AE)\right] = 2\cdot 2\gamma x_1$

$2\alpha\left[(AE') - (AE)\right] = 4\gamma x_1$

$(AE') - (AE) = \frac{2\gamma x_1}{\alpha}$ **(1)**

Αλλά $(AE') + (AE) = 2\alpha$ **(2)**

$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad 2(AE) = 2\alpha - \frac{2\gamma x_1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad (AE) = \alpha - \frac{\gamma x_1}{\alpha}$ **(3)**

ii)

Έστω $B(x_2, y_2)$

Από το (i) θα έχουμε $(BE) = \alpha - \frac{\gamma x_2}{\alpha}$ **(4)**

$(3) + (4) \quad \Rightarrow \quad (AE) + (BE) = \alpha - \frac{\gamma x_1}{\alpha} + \alpha - \frac{\gamma x_2}{\alpha}$

$(AB) = 2\alpha - \frac{\gamma(x_1 + x_2)}{\alpha}$, αλλά $x_1 + x_2 = 2x_o$ αφού Μ μέσο

Οπότε $(AB) = 2\alpha - \frac{\gamma 2x_o}{\alpha}$

$(AB) = 2\left(\alpha - \frac{\gamma x_o}{\alpha}\right)$