3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Ονομάζουμε **υπερβολή** με **εστίες** τα σημεία Ε΄ και Ε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα Ε΄ και Ε είναι σταθερή και μικρότερη του (Ε΄Ε).

2.

Άμεση συνέπεια

$|(ΜΕ΄)-(ΜΕ)| = 2α \Leftrightarrow$ Ο γ.τ του σημείου Μ είναι υπερβολή με εστίες Ε΄ και Ε.

Περιορισμός : Αν $(Ε'Ε) = 2γ$, πρέπει $α < γ$

3.

Εξίσωση υπερβολής με εστίες $Ε'(-γ,\ 0)$, $Ε(γ,\ 0)$

$$\frac{x^2}{α^2}-\frac{y^2}{β^2}=1, \quad \text{όπου} \quad β=\sqrt{γ^2-α^2}$$

4.

Εξίσωση υπερβολής με εστίες $Ε'(0,\ -γ)$, $Ε(0,\ γ)$

$$\frac{y^2}{α^2}-\frac{x^2}{β^2}=1, \quad \text{όπου} \quad β=\sqrt{γ^2-α^2}$$

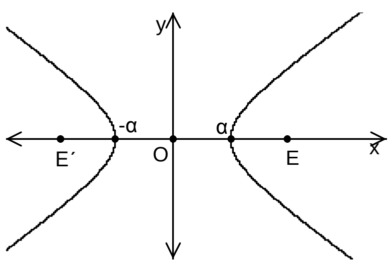
5.

Ισοσκελής υπερβολή

Όταν $α = β$, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και έχει εξίσωση $x^2-y^2 = α^2$

6.

Ιδιότητες από το σχήμα



i) Εστίες στον άξονα $x'x$

ii) Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$

iii) Συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$
ως προς τον άξονα $y'y$
ως προς την αρχή Ο

iv) Σχέση μεγεθών : $x \le -α$ ή $x \ge α$

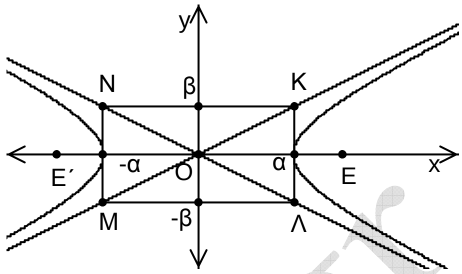
7.

Ασύμπτωτες

Λέγονται οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha} x$

8.

Ορθογώνιο βάσης



Λέγεται το ορθογώνιο ΚΛΜΝ,

όπου Κ(α, β)

9.

Εκκεντρότητα

i) $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$, αποδεικνύεται ότι : $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

10.

Εφαπτομένη

$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$, όπου $M(x_1 , y_1)$ το σημείο επαφής.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Το πρόσημο των παραμέτρων

Σε κάθε υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ οι α, β, γ είναι > 0

2.

Κάτι προφανές αλλά χρήσιμο

$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

3.

Ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης υπερβολής

$\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$

4.
Ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης εφαπτομένης

$\beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$

5.
Γενική μέθοδος

Για την επίλυση του μεγάλου όγκου των προβλημάτων :

α) Θεωρούμε τους απαραίτητους αγνώστους.
β) Μετατρέπουμε τις υποθέσεις του προβλήματος σε εξισώσεις
γ) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων
δ) Ακολουθούμε βήμα – βήμα την εκφώνηση

6.
Για εφαπτομένη από σημείο που δεν ανήκει στην υπερβολή

Θεωρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης έχοντας αγνώστους τις συντεταγμένες του σημείου επαφής .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.
Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$

Προτεινόμενη λύση

$9x^2 + 25y^2 = 225 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Επειδή $25 > 9$, οι εστίες είναι στον άξονα $x'x$.

Είναι $\alpha = 5$ και $\beta = 3$ άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 4$

Δηλαδή εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$.

Η ζητούμενη ισοσκελής υπερβολή θα είναι της μορφής $x^2 - y^2 = \alpha^2$ με $\gamma = 4$.

Όμως $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ και αφού $\alpha = \beta$, θα έχουμε $2\alpha^2 = \gamma^2$

$2\alpha^2 = 16$

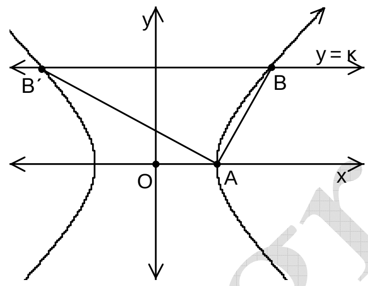
$\alpha^2 = 8$

Επομένως η ζητούμενη υπερβολή είναι $x^2 - y^2 = 8$.

2.

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ και η ευθεία $y = \kappa$, η οποία τέμνει την υπερβολή στα σημεία Β΄ και Β. Αν Α΄ και Α είναι οι κορυφές της υπερβολής δείξτε ότι $B\hat{A}B' = B\hat{A'}B' = 90^o$

Προτεινόμενη λύση



Σύστημα $\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha^2 \\ y = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 - \kappa^2 = \alpha^2 \\ y = \kappa \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = \alpha^2 + \kappa^2 \\ y = \kappa \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\alpha^2 + \kappa^2} \\ y = \kappa \end{cases}$

Άρα $B'\left(-\sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\ ,\ \kappa\right)$ και $B\left(\sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\ ,\ \kappa\right)$

$\overrightarrow{B'A} = \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\ ,\ -\kappa\right)$ και $\overrightarrow{BA} = \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\ ,\ -\kappa\right)$

Οπότε $\overrightarrow{B'A} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\right)\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\right) + \kappa^2$

$= \alpha^2 - \alpha^2 - \kappa^2 + \kappa^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{B'A} \perp \overrightarrow{BA}$

Ομοίως $B\hat{A'}B' = 90^o$

3.
Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων του τυχαίου σημείου $M(x_1,\ y_1)$ της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από τις ασύμπτωτες είναι σταθερό .

Προτεινόμενη λύση

Ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $\varepsilon_1:\ y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ και $\varepsilon_2:\ y=\frac{\beta}{\alpha}x$

$\beta x+\alpha y=0$ και $\beta x-\alpha y=0$

$$d(M,\ \varepsilon_1)=\frac{|\beta x_1+\alpha y_1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{και} \quad d(M,\ \varepsilon_2)=\frac{|\beta x_1-\alpha y_1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Οπότε $d(M,\ \varepsilon_1)\cdot d(M,\ \varepsilon_2)=\frac{|\beta^2 x_1{}^2-\alpha^2 y_1{}^2|}{\alpha^2+\beta^2}$ **(1)**

Επειδή όμως το M ανήκει στην υπερβολή, έχουμε $\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow$

$\beta^2 x_1^2-\alpha^2 y_1^2=\alpha^2\beta^2$

Ακόμα είναι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

Οπότε η (1) γίνεται $d(M,\ \varepsilon_1)\cdot d(M,\ \varepsilon_2)=\frac{|\alpha^2\beta^2|}{\gamma^2}=\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}=$ σταθερό.

4.

Δείξτε ότι για τις υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$ ισχύει

$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2\cdot\varepsilon_2^2$, όπου ε_1 , ε_2 οι εκκεντρότητες

Προτεινόμενη λύση

Έστω $2\gamma_1$ η εστιακή απόσταση της πρώτης υπερβολής . Τότε $\beta^2=\gamma_1^2-\alpha^2$

$$\gamma_1^2=\alpha^2+\beta^2$$

$$\varepsilon_1^2=\frac{\gamma_1^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$$

Έστω $2\gamma_2$ η εστιακή απόσταση της δεύτερης υπερβολής . Τότε $\alpha^2=\gamma_2^2-\beta^2$

$$\gamma_2^2=\alpha^2+\beta^2$$

$$\varepsilon_2^2=\frac{\gamma_2^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}$$

Αρκεί να αποδείξουμε $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2\cdot\varepsilon_2^2$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}$$

$$\beta^2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha^2+\beta^2)^2$$

$\beta^2\alpha^2+\beta^4+\alpha^4+\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4$ που ισχύει

5.
Μια υπερβολή έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$, εστίες στον άξονα x΄x και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων .
Να βρείτε την οξεία γωνία των ασυμπτώτων της υπερβολής.

Προτεινόμενη λύση

Από την υπόθεση του προβλήματος προκύπτει ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής έχουν εξισώσεις

Οι ασύμπτωτες είναι ε_1: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και ε_2: $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$

Πάμε να υπολογίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\beta}{\alpha}$ της ε_1

$$\varepsilon = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 4$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} = 4$$

$$1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 4$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{3} = \text{εφ}\, 60^o$$

Επομένως η ε_1 σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία 60^o

Λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα x΄x, η αμβλεία γωνία των ασυμπτώτων θα είναι 120^o , άρα η οξεία γωνία θα είναι 60^o

6.

Έστω η υπερβολή $2x^2 - 3y^2 = 6$.   Να βρείτε

i) Τις εφαπτόμενες της υπερβολής που είναι παράλληλες στη ευθεία $y = x$

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από μία των εφαπτομένων και τις ασύμπτωτες.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν $M(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη (ε) σ' αυτό έχει εξίσωση

$$2x x_1 - 3y y_1 = 6 \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{2x_1}{3y_1}$$

(ε) παράλληλη στην ευθεία $y = x \iff \dfrac{2x_1}{3y_1} = 1 \iff 2x_1 = 3y_1$ **(1)**

Μ ανήκει στην υπερβολή $\iff 2x_1^2 - 3y_1^2 = 6$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $M(3, 2)$ ή $M(-3, -2)$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι ε_1: $6x - 6y = 6$, ε_2: $-6x + 6y = 6$

ε_1: $y = x - 1$, ε_2: $y = x + 1$

ii)

Η υπερβολή γράφεται $\dfrac{2x^2}{6} - \dfrac{3y^2}{6} = 1 \iff \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2} = 1 \iff \dfrac{x^2}{\sqrt{3}^2} - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$

Μία ασύμπτωτη είναι   ε : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x \iff \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}\,x$,

Σύστημα των ε_1, ε : $\begin{cases} y = x - 1 \\ \sqrt{3}y = \sqrt{2}x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 1 \\ \sqrt{3}(x-1) = \sqrt{2}x \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ \sqrt{3}x - \sqrt{3} = \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ (\sqrt{3} - \sqrt{2})x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = 3 + \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 + \sqrt{6} - 1 = 2 + \sqrt{6} \\ x = 3 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Οπότε η μία κορυφή του τριγώνου είναι $A(3+\sqrt{6},\ 2+\sqrt{6})$

ομοίως η άλλη $B(3-\sqrt{6},\ y=2-\sqrt{6})$

και η τρίτη $O(0,0)$

Είναι $\overrightarrow{OA}=(3+\sqrt{6},\ y=2+\sqrt{6})$ και $\overrightarrow{OB}=(3-\sqrt{6},\ y=2-\sqrt{6})$

$$\det(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ 3-\sqrt{6} & 2-\sqrt{6} \end{vmatrix} = -2\sqrt{6}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $(OAB) = \frac{1}{2}|-2\sqrt{6}| = \sqrt{6}$ τετραγωνικές μονάδες

7.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $x^2-4y^2=1$ η οποία απέχει από την αρχή O απόσταση $\frac{1}{4}$ μονάδες

Προτεινόμενη λύση

Έστω $(\varepsilon):\ x x_1 - 4y y_1 = 1$ η ζητούμενη εφαπτομένη

$x x_1 - 4y y_1 - 1 = 0$

$$d(O,\ \varepsilon) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{x_1^2+16y_1^2}} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x_1^2+16y_1^2} = 4$$

$$x_1^2+16y_1^2 = 16 \quad \textbf{(1)}$$

M ανήκει στην υπερβολή $\Leftrightarrow$ $x_1^2-4y_1^2=1$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) $\Leftrightarrow$ $x_1=\pm 2$ και $y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Επομένως υπάρχουν 4 σημεία επαφής και η εφαπτομένη είναι

$2x-2\sqrt{3}y-1=0$ ή $2x+2\sqrt{3}y-1=0$

ή $-2x-2\sqrt{3}y-1=0$

ή $-2x+2\sqrt{3}y-1=0$

8.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων οποίοι διέρχονται από το σημείο $M(-1,\ 0)$ και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Προτεινόμενη λύση

Ο δοσμένος κύκλος $x^2 + y^2 - 2x = 0$ έχει κέντρο $K(1,\ 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Έστω $\Lambda(x_o,\ y_o)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου,

δηλαδή κέντρο κύκλου $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$ που διέρχεται από το σημείο $M(-1,\ 0)$ και εφάπτεται εξωτερικά στον δοσμένο $\Leftrightarrow$

$(-1 - x_o)^2 + y_o^2 = R^2$ **(1)** και $(K\Lambda) = R + \rho$ **(2)**

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x_o - 1)^2 + y_o^2} = R + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_o - 1)^2 + y_o^2}\right)^2 = (1 + R)^2$$

$$x_o^2 - 2x_o + 1 + y_o^2 = 1 + 2R + R^2$$

$$x_o^2 - 2x_o + y_o^2 = 2R + R^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$x_o^2 - 2x_o + y_o^2 = 2R + (-1 - x_o)^2 + y_o^2$$

$$x_o^2 - 2x_o + y_o^2 = 2R + 1 + x_o^2 + 2x_o + y_o^2$$

$$-4x_o = 2R + 1$$

$$R = \frac{-4x_o - 1}{2} \quad \textbf{(3)}$$

Περιορισμός : $R > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x_o - 1}{2} > 0 \Leftrightarrow x_o < -\dfrac{1}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow (-1 - x_o)^2 + y_o^2 = \left(\frac{-4x_o - 1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + x_o^2 + 2x_o + y_o^2 = \frac{16x_o^2 + 8x_o + 1}{4}$$

$$4 + 4x_o^2 + 8x_o + 4y_o^2 = 16x_o^2 + 8x_o + 1$$

$$3 = 12x_o^2 - 4y_o^2$$

$$12x_o^2 - 4y_o^2 = 3$$

$$\frac{x_o^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y_o^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

Επομένως το σημείο Λ βρίσκεται στην υπερβολή $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$ με $x < -\dfrac{1}{4}$

9.

Η υπερβολή $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ και η ευθεία $y = x + 1$ τέμνονται στα σημεία Α, Β.
Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

Σύστημα $\begin{cases} y = x+1 \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ 4x^2-y^2=16 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ 4x^2-(x+1)^2=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ 4x^2-x^2-2x-1=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ 3x^2-2x-17=0 \end{cases}$$

Οι ρίζες x_1, x_2 της δευτεροβάθμιας είναι οι τετμημένες των Α, Β αντίστοιχα,

οπότε $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$

Αλλά $x_M = \frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x_M = \frac{1}{3}$

Μ ανήκει στην (ε) $\Rightarrow y_M = x_M + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

10.

Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ στο σημείο της $M(2\sqrt{2},\ 1)$ και η κάθετη στην εφαπτομένη στο ίδιο σημείο τέμνουν τον άξονα των y στα σημεία Α και Β. Δείξτε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής .

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο $M(2\sqrt{2},\ 1)$ είναι

$\frac{2\sqrt{2}x}{4}-\frac{y}{1}=1$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και σημείο τομής της με τον άξονα των y το $A(0,\ -1)$.

Η κάθετη στην εφαπτομένη στο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda'=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$,

και εξίσωση $y-1=-\sqrt{2}\ (x-2\sqrt{2})$

$y-1=-\sqrt{2}\,x+4$

$y=-\sqrt{2}\,x+5$ Για $x=0$ δίνει $B(0,\ 5)$

Στην υπερβολή, επειδή $\alpha=2$ και $\beta=1$, θα είναι $\gamma=\sqrt{5}$

Οπότε εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{5},\ 0)$ και $E(\sqrt{5},\ 0)$

Ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ έχει κέντρο το

$K\left(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)=K(0,\ 2)$ και ακτίνα $\rho=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(5+1)^2}}{2}=3$

Οπότε η εξίσωσή του είναι $x^2+(y-2)^2=9$, η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των εστιών, άρα ο κύκλος διέρχεται από τις εστίες.

11.

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από μία εφαπτομένη της είναι ίσο με β^2.

Προτεινόμενη λύση

Έστω (ε): $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \iff x x_1\beta^2-y y_1\alpha^2-\alpha^2\beta^2=0$ η εφαπτομένη Οι

$$d(E΄,\varepsilon)=\frac{|-\gamma x_1\beta^2-\alpha^2\beta^2|}{\sqrt{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}}=\frac{\beta^2|\gamma x_1+\alpha^2|}{\sqrt{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}}$$

$$d(E,\varepsilon)=\frac{|\gamma x_1\beta^2-\alpha^2\beta^2|}{\sqrt{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}}=\frac{\beta^2|\gamma x_1-\alpha^2|}{\sqrt{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}}$$

Οπότε $d(E΄,\varepsilon)\cdot d(E,\varepsilon)=\frac{\beta^2|\gamma x_1+\alpha^2|}{\sqrt{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}}\cdot\frac{\beta^2|\gamma x_1-\alpha^2|}{\sqrt{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}}$

$$=\frac{\beta^4|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^4}$$

$$=\frac{\beta^4|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2\beta^4+y_1^2\alpha^2\alpha^2}\quad \textbf{(1)}$$

Όμως το Μ ανήκει στην υπερβολή , άρα $\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1 \iff \alpha^2y_1^2=\beta^2x_1^2-\alpha^2\beta^2$

Η (1) γίνεται $d(E΄,\varepsilon)\cdot d(E,\varepsilon)=\frac{\beta^4|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2\beta^4+(x_1^2\beta^2-\alpha^2\beta^2)\alpha^2}$

$$=\frac{\beta^4|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2\beta^4+x_1^2\beta^2\alpha^2-\alpha^4\beta^2}$$

$$=\frac{\beta^4|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{\beta^2(x_1^2\beta^2+x_1^2\alpha^2-\alpha^4)}=$$

$$=\frac{\beta^2|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2\beta^2+x_1^2\alpha^2-\alpha^4}$$

$$=\frac{\beta^2|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2(\beta^2+\alpha^2)-\alpha^4}$$

$$=\frac{\beta^2|\gamma^2x_1^2-\alpha^4|}{x_1^2\gamma^2-\alpha^4}\quad \textbf{(2)}$$

Επειδή όμως ο παρονομαστής της (1) είναι θετικός , άρα και της (2),

η (2) $\Rightarrow$ $d(E', \varepsilon)\cdot d(E, \varepsilon) = \dfrac{\beta^2 |\gamma^2 x_1^2 - \alpha^4|}{|x_1^2\gamma^2 - \alpha^4|} = \beta^2$

12.

Μια υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο και εστίες στον άξονα των y . Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής και μία ασύμπτωτη της υπερβολής είναι η ευθεία $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρείτε

i) Τις εστίες της υπερβολής
ii) Την εξίσωση της υπερβολής
iii) Τις κορυφές του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής
iv) Την εκκεντρότητα της υπερβολής

Προτεινόμενη λύση

i)

Η εξίσωση της υπερβολής θα είναι της μορφής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

Κορυφές της υπερβολής είναι τα σημεία $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$

Αφού ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από αυτές, έχουμε $\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$ **(1)**

Ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$

Όμως από υπόθεση μία ασύμπτωτη είναι η $y = -\frac{4}{3}x$,

άρα $-\frac{4}{3} = -\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow 3\alpha = 4\beta$ και λόγω της (1) έχουμε $\beta = 3$

Η $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow 3^2 = \gamma^2 - 4^2 \Rightarrow \gamma^2 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$

Επομένως οι εστίες είναι τα σημεία $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$

ii)

Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

iii)

$K(3, -4)$, $\Lambda(-3, -4)$, $M(-3, 4)$ και $N(3, 4)$

iv)

Η εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$

13.

Δίνεται η υπερβολή $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ και σημείο της $M(x_1, y_1)$ διαφορετικό από τις κορυφές της. Έστω (ε) η εφαπτομένη στο M και (ε΄) η κάθετη της (ε) στο M. Αν η (ε΄) τέμνει τον άξονα των x στο Γ και τον άξονα των y στο Δ,

i) Να βρείτε την εξίσωση της (ε΄)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ

iv) Να δείξετε ότι, όταν το M μεταβάλλεται το Ν κινείται σε υπερβολή.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$(\varepsilon): \ \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \iff x x_1 \beta^2 - y y_1 \alpha^2 = \alpha^2\beta^2 \quad \text{με} \quad \lambda_\varepsilon = \frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$$

$$\text{Άρα} \quad \lambda_{\varepsilon'} = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}$$

$$(\varepsilon'): \ y - y_1 = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}(x - x_1) \iff y = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}x + \frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2} + y_1$$

$$y = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}x + \frac{\alpha^2 y_1 + \beta^2 y_1}{\beta^2}$$

$$y = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}x + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) y_1}{\beta^2}$$

$$y = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}x + \frac{\gamma^2 y_1}{\beta^2} \qquad \textbf{(1)}$$

ii)

Για $y = 0$, η (1) $\Rightarrow$ …………………… $\Gamma\left(\dfrac{\gamma^2 x_1}{\alpha^2},\ 0\right)$

Για $x = 0$, η (1) $\Rightarrow$ …………………… $\Delta\left(0,\ \dfrac{\gamma^2 y_1}{\beta^2}\right)$

iii)

$$x_N = \frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2} = \frac{\gamma^2 x_1}{2\alpha^2} \quad \text{και} \quad y_N = \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2} = \frac{\gamma^2 y_1}{2\beta^2} \qquad \textbf{(2)}$$

iv)

Από τις (2) έχουμε $x_1 = \dfrac{2\alpha^2 x_N}{\gamma^2}$ και $y_1 = \dfrac{2\beta^2 y_N}{\gamma^2}$ **(3)**

Και επειδή το $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή , θα έχουμε

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1 \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \frac{\frac{4\alpha^4 x_N^2}{\gamma^4}}{\alpha^2} - \frac{\frac{4\beta^4 y_N^2}{\gamma^4}}{\beta^2}=1$$

$$\frac{4\alpha^2 x_N^2}{\gamma^4} - \frac{4\beta^2 y_N^2}{\gamma^4}=1$$

$$\frac{x_N^2}{\frac{\gamma^4}{4\alpha^2}} - \frac{y_N^2}{\frac{\gamma^4}{4\beta^2}}=1$$ που είναι εξίσωση υπερβολής

14.

Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η εφαπτομένη (ε) στο σημείο της M(x_1, y_1).
Αν η (ε) τέμνει τις εφαπτομένες στις κορυφές της υπερβολής στα Γ και Δ , δείξτε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής

Προτεινόμενη λύση

(ε) : $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x x_1\beta^2 - y y_1\alpha^2 = \alpha^2\beta^2$

Κορυφές τις υπερβολής είναι τα σημεία $A'(-\alpha,\ 0)$ και $A(\alpha,\ 0)$

Οι εφαπτόμενες στα A' και A έχουν εξισώσεις $x=-\alpha$ και $x=\alpha$ αντίστοιχα

Λύνοντας τα συστήματα Σ_1: $x x_1\beta^2 - y y_1\alpha^2 = \alpha^2\beta^2$ και $x=-\alpha$

Σ_2: $x x_1\beta^2 - y y_1\alpha^2 = \alpha^2\beta^2$ και $x=\alpha$

βρίσκουμε $\Gamma\left(-\alpha\ ,\ -\frac{\beta^2(x_1+\alpha)}{\alpha y_1}\right)$ και $\Delta\left(\alpha\ ,\ \frac{\beta^2(x_1-\alpha)}{\alpha y_1}\right)$

$\overrightarrow{E\Gamma}=\left(-\alpha-\gamma\ ,\ -\frac{\beta^2(x_1+\alpha)}{\alpha y_1}\right)$ και $\overrightarrow{E\Delta}=\left(\alpha-\gamma\ ,\ \frac{\beta^2(x_1-\alpha)}{\alpha y_1}\right)$

$$\overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Delta} = (-\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma) - \frac{\beta^4(x_1^2-\alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2} = \gamma^2-\alpha^2-\frac{\beta^4(x_1^2-\alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2}$$

$$= \beta^2-\frac{\beta^4(x_1^2-\alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha^2y_1^2-\beta^2x_1^2+\beta^2\alpha^2)}{\alpha^2y_1^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως το $M(x_1,\ y_1)$ ανήκει στην υπερβολή , άρα $\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1 \quad \Leftrightarrow$

$\beta^2x_1^2-\alpha^2y_1^2-\alpha^2\beta^2=0$

(1) $\Rightarrow \quad \overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Delta}=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Delta} \quad \Rightarrow$ ο κύκλος διαμέτρου ΓΔ διέρχεται από την εστία Ε.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι διέρχεται και από την Ε΄

15.

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, η οποία έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο, εστίες Ε΄, Ε πάνω στον άξονα x΄x, διέρχεται από το σημείο Α(8, 6) και ισχύει $E'\widehat{A}E = 90^o$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η ζητούμενη υπερβολή και $E'(-\gamma,\ 0)$, $E(\gamma,\ 0)$ οι εστίες

Τότε $\overrightarrow{AE} = (\gamma - 8,\ -6)$ και $\overrightarrow{AE'} = (-\gamma - 8,\ -6)$

$E'\widehat{A}E = 90^o \iff \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE'} = 0 \iff$

$(\gamma - 8)(-\gamma - 8) + 36 = 0$

$-(\gamma - 8)(\gamma + 8) + 36 = 0$

$(\gamma - 8)(\gamma + 8) = 36$

$\gamma^2 - 64 = 36$

$\gamma^2 = 100 \iff \alpha^2 + \beta^2 = 100$ **(1)**

Α ανήκει στην υπερβολή $\iff \frac{64}{\alpha^2} - \frac{36}{\beta^2} = 1$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\alpha^2 = 40$ και $\beta^2 = 60$

Άρα η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{60} = 1$

16.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $y^2 - x^2 = 4$, η οποία εφαπτομένη σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Προτεινόμενη λύση

Αν $M(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη είναι $yy_1 - xx_1 = 4$

Για $y = 0$ δίνει $x = -\frac{4}{x_1}$, άρα τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma\left(-\frac{4}{x_1},\ 0\right)$ με $x_1 < 0$

Για $x = 0$ δίνει $y = -\frac{4}{y_1}$, άρα τέμνει τον $y'y$ στο $\Delta\left(0,\ \frac{4}{y_1}\right)$ με $y_1 > 0$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ είναι ίσο με

$$(\text{ΟΓΔ}) = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{4}{|x_1|}\frac{4}{|y_1|} = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 y_1 = 2\sqrt{3} \quad \textbf{(1)}$$

$M(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή $y_1^2 - x_1^2 = 4$ **(2)**

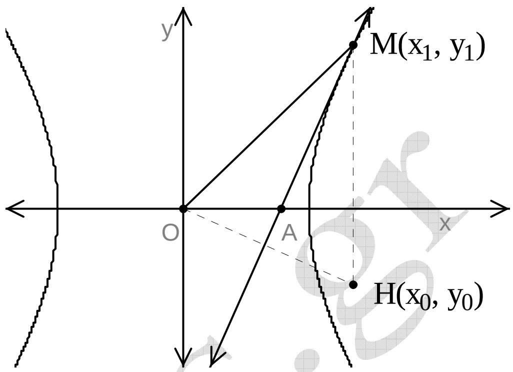
Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και λαμβάνοντας υπόψη και τους περιορισμούς $x_1 < 0$ και $y_1 > 0$ βρίσκουμε $x_1 = -\sqrt{2}$ και $y_1 = \sqrt{6}$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $\sqrt{6}\,y + \sqrt{2}\,x = 4$.

17.

Σημείο Μ κινείται στην υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ τέμνει τον άξονα x′x σε σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΜΑΟ (Ο η αρχή των αξόνων) κινείται σε μια άλλη υπερβολή.

Προτεινόμενη λύση



Έστω $M(x_1,\ y_1)$ και $H(x_o,\ y_o)$ το ορθόκεντρο του τρ. ΜΑΟ.

ΜΑ εφαπτομένη: $\frac{x_1x}{\alpha^2}-\frac{y_1y}{\beta^2}=1$

$\beta^2x_1x-\alpha^2y_1y=\alpha^2\beta^2$

$\lambda_{MA}=-\frac{\beta^2x_1}{-\alpha^2y_1}=\frac{\beta^2x_1}{\alpha^2y_1}$

ΟΗ ⊥ ΜΑ $\Rightarrow$ $\lambda_{OH}\cdot\lambda_{MA}=-1$

$\lambda_{OH}=-\frac{\alpha^2y_1}{\beta^2x_1}$

Εξίσωση της ευθείας ΟΗ: $y-0=-\frac{\alpha^2y_1}{\beta^2x_1}(x-0)$

$$y=-\frac{\alpha^2y_1}{\beta^2x_1}x$$

Η ∈ ΟΗ $\Rightarrow$ $y_o=-\frac{\alpha^2y_1}{\beta^2x_1}x_o$ **(1)**

ΜΗ ⊥ ΟΑ $\Rightarrow$ $x_1=x_o$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) με αγνώστους x_o, y_o: $x_o=x_1$ και $y_o=-\frac{\alpha^2y_1}{\beta^2}$

$x_1=x_o$ και $y_1=-\frac{\beta^2y_o}{\alpha^2}$ **(3)**

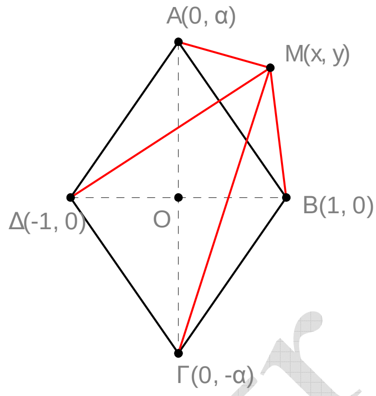
Μ ∈ στην υπερβολή $\Rightarrow$ $\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ \frac{x_o^2}{\alpha^2}-\frac{\left(-\frac{\beta^2y_o}{\alpha^2}\right)^2}{\beta^2}=1$

$$\frac{x_o^2}{\alpha^2}-\frac{\frac{\beta^4y_o^2}{\alpha^4}}{\beta^2}=1$$

$$\frac{x_o^2}{\alpha^2}-\frac{y_o^2}{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2}=1$$ υπερβολή

18.

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει (ΜΑ) (ΜΓ) = (ΜΒ) (ΜΔ).



Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε σύστημα αξόνων με άξονες τις διαγώνιες και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω

$A(0, \alpha)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(0, -\alpha)$, $\Delta(-1, 0)$, $M(x, y)$

με $\alpha > 0$.

$(MA)\,(M\Gamma) = (MB)\,(M\Delta) \quad \Leftrightarrow$

$(MA)^2\,(M\Gamma)^2 = (MB)^2\,(M\Delta)^2$

$\left[(x-0)^2 + (y-\alpha)^2\right]\left[(x-0)^2 + (y+\alpha)^2\right] = \left[(x-1)^2 + (y-0)^2\right]\left[(x+1)^2 + (y-0)^2\right]$

$(x^2 + y^2 - 2\alpha y + \alpha^2)\,(x^2 + y^2 + 2\alpha y + \alpha^2) = (x^2 - 2x + 1 + y^2)\,(x^2 + 2x + 1 + y^2)$

$\left[(x^2 + y^2 + \alpha^2) - 2\alpha y\right]\left[(x^2 + y^2 + \alpha^2) + 2\alpha y\right] =$

$= \left[(x^2 + y^2 + 1) - 2x\right]\left[(x^2 + y^2 + 1) + 2x\right]$

$(x^2 + y^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 y^2 = (x^2 + y^2 + 1^2)^2 - 4x^2$

$x^4 + y^4 + \alpha^4 + 2x^2y^2 + 2y^2\alpha^2 + 2\alpha^2x^2 - 4\alpha^2y^2 = x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2y^2 + 2x^2 - 4x^2$

$2\alpha^2x^2 + 2x^2 - 2\alpha^2y^2 - 2y^2 = 1 - \alpha^4$

$2(\alpha^2 + 1)\,x^2 - 2(\alpha^2 + 1)\,y^2 = (1 - \alpha^2)\,(1 + \alpha^2)$

$x^2 - y^2 = \dfrac{1-\alpha^2}{2} \qquad \textbf{(1)}$

- Όταν $1 - \alpha^2 > 0$, δηλαδή $\alpha^2 < 1$, δηλαδή $\alpha < 1$
  η (1) παριστάνει ισοσκελή υπερβολή με τις εστίες της στον άξονα $x'x$

- Όταν $1 - \alpha^2 < 0$, δηλαδή $\alpha^2 > 1$, δηλαδή $\alpha > 1$
  η (1) γίνεται $y^2 - x^2 = -\dfrac{1-\alpha^2}{2}$, οπότε παριστάνει ισοσκελή υπερβολή με τις εστίες της στον άξονα $y'y$

- Όταν $1 - \alpha^2 = 0$, δηλαδή $\alpha^2 = 1$, δηλαδή $\alpha = 1$
  η (1) γίνεται $y^2 - x^2 = 0$,
  $y^2 = x^2$
  $y = x$ ή $y = -x$ οπότε παριστάνει τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων

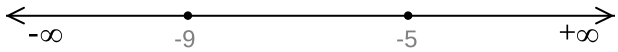
19.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{\lambda+5}+\frac{y^2}{\lambda+9}=1$$

Στις περιπτώσεις που παριστάνει κωνική τομή, να βρείτε τις εστίες.

Προτεινόμενη λύση



- Για $\lambda = -9$ ή $\lambda = -5$ η εξίσωση είναι αδύνατη, άρα δεν παριστάνει τίποτα.
- Για $\lambda < -9$, άρα και $\lambda < -5 \Rightarrow \lambda + 9 < 0$ και $\lambda + 5 < 0$

  $\frac{x^2}{\lambda+5} < 0$ και $\frac{y^2}{\lambda+9} < 0$

  $\frac{x^2}{\lambda+5}+\frac{y^2}{\lambda+9} < 0$

  η εξίσωση είναι αδύνατη, άρα δεν παριστάνει τίποτα.

- Για $-9 < \lambda < -5 \Rightarrow \lambda + 9 > 0$ και $\lambda + 5 < 0$

  Η εξίσωση γράφεται $-\frac{x^2}{-(\lambda+5)}+\frac{y^2}{\lambda+9}=1$

  $\frac{y^2}{\lambda+9}-\frac{x^2}{-(\lambda+5)}=1$ που παριστάνει υπερβολή με τις εστίες της στον άξονα $y'y$.

  Είναι $\alpha^2 = \lambda + 9$ και $\beta^2 = -(\lambda + 5)$

  Αλλά $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow -(\lambda + 5) = \gamma^2 - (\lambda + 9)$

  $-\lambda - 5 = \gamma^2 - \lambda - 9$

  $4 = \gamma^2$

  $\gamma = 2$

  Άρα οι εστίες είναι Ε΄(0, –2), Ε(2, 0)

- Για $\lambda > -5$, άρα και $\lambda > -9 \Rightarrow \lambda + 5 > 0$ και $\lambda + 9 > 0$

  Άρα η εξίσωση παριστάνει έλλειψη.

  Επειδή δε, $\lambda + 9 > \lambda + 5$, οι εστίες της ανήκουν στον άξονα $y'y$.

  Η εξίσωση γράφεται $\frac{y^2}{\lambda+9}+\frac{x^2}{\lambda+5}=1$ με $\alpha^2 = \lambda + 9$ και $\beta^2 = \lambda + 5$

  Αλλά $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \lambda + 5 = \lambda + 9 - \gamma^2$

  $\gamma^2 = 4$

  $\gamma = 2$

  Άρα οι εστίες είναι Ε΄(0, –2), Ε(2, 0)

20.

Η εστία της παραβολής $y^2 = 2px$ με $p > 0$ συμπίπτει με μία εστία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $0 < \beta < \alpha$.

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}\right)$ ανήκει σε μια ισοσκελή υπερβολή ανεξάρτητη των p, α, β.

ii) Έστω ε_1, ε_2 οι εφαπτόμενες της παραβολής που άγονται από την εστία της έλλειψης η οποία δεν είναι εστία της παραβολής. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής A_1, A_2 συναρτήσει του στοιχείου (γ) της έλλειψης.

iii) Αν τα A_1, A_2 ανήκουν στην έλλειψη, να υπολογίσετε την εκκεντρότητά της.

Προτεινόμενη λύση

Επειδή $p > 0$, η εστία $E(\gamma, 0)$ της έλλειψης θα συμπίπτει με την εστία $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ της παραβολής. Άρα θα είναι $\frac{p}{2} = \gamma$, οπότε $p = 2\gamma$ **(1)**

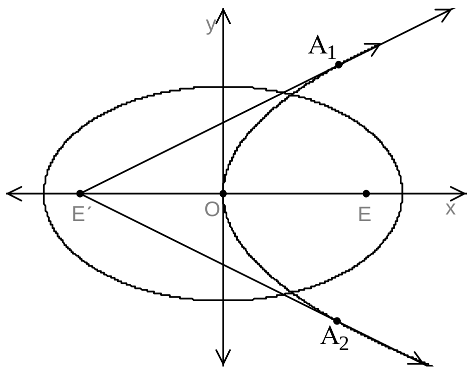
i)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x_M^2 - y_M^2 =$ σταθερό.

$$x_M^2 - y_M^2 = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{p}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{p^2} - \frac{\beta^2}{p^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{p^2}$$

Αλλά $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, οπότε $x_M^2 - y_M^2 = \frac{\gamma^2}{p^2} \overset{(1)}{=} \frac{\gamma^2}{(2\gamma)^2} = \frac{1}{4}$

ii)



Έστω $A_1(x_1, y_1)$ και $A_2(x_2, y_2)$

Θα είναι $\varepsilon_1 : \; y_1 y = p(x + x_1)$

$E' \in \varepsilon_1 \Rightarrow 0.y = p(-\gamma + x_1)$

$0 = -\gamma + x_1$

$x_1 = \gamma$

$A_1 \in$ στην παραβολή $\Rightarrow y_1^2 = 2px_1$

$= 2p\gamma$

$\overset{(1)}{=} 2.2\gamma.\gamma$

$= 4\gamma^2$

Άρα $y_1 = 2\gamma$, οπότε $A_1(\gamma, 2\gamma)$. Ομοίως δε, $A_2(\gamma, -2\gamma)$

iii)

$A_1 \in$ στην έλλειψη $\Rightarrow \quad \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} + \dfrac{(2\gamma)^2}{\beta^2} = 1$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{4\gamma^2}{\beta^2} = 1$$

$\beta^2\,\gamma^2 + 4\alpha^2\,\gamma^2 = \alpha^2\,\beta^2$ αλλά $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\,\gamma^2 + 4\alpha^2\,\gamma^2 = \alpha^2\,(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\alpha^2\,\gamma^2 - \gamma^4 + 4\alpha^2\,\gamma^2 = \alpha^4 - \alpha^2\,\gamma^2$$

$$-\gamma^4 - \alpha^4 + 6\alpha^2\,\gamma^2 = 0$$

$$\gamma^4 - 6\alpha^2\,\gamma^2 + \alpha^4 = 0$$

$$\frac{\gamma^4}{\alpha^4} - \frac{6\alpha^2\gamma^2}{\alpha^4} + 1 = 0$$

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^4 - 6\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\varepsilon^4 - 6\varepsilon^2 + 1 = 0$$

$\Delta = 36 - 4 = 32 \qquad \varepsilon^2 = \dfrac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$

$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$= 3 \pm 2\sqrt{2}$ αλλά $\varepsilon < 1$

άρα $\varepsilon^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$