4.1 Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω ισχυρισμός $P(\nu)$, όπου ν θετικός ακέραιος.
Αν (i) $P(1)$ αληθής και (ii) $P(\nu) \Rightarrow P(\nu+1)$ για κάθε ν,
τότε $P(\nu)$ αληθής για κάθε ν.

2.

Ανισότητα Bernoulli

$(1+\alpha)^{\nu} > 1+\nu\alpha$ για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$
όπου α πραγματικός με $-1 < \alpha \neq 0$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Παρατήρηση

Η Μαθηματική Επαγωγή είναι **μέθοδος απόδειξης** ισχυρισμών που εξαρτώνται από τη **μεταβλητή** ν.

Σημείωση : Ο ν μπορεί να είναι
i) κάθε θετικός ακέραιος
ii) κάθε μη αρνητικός ακέραιος
iii) κάθε ακέραιος $\geq$ συγκεκριμένου φυσικού

2.

Τα βήματα της Μαθηματικής Επαγωγής

α) Διαπιστώνουμε ότι το αποδεικτέο αληθεύει για $\nu = 1$
β) Δεχόμαστε ότι το αποδεικτέο αληθεύει για $\nu = \kappa$
γ) Αποδεικνύουμε ότι το αποδεικτέο αληθεύει για $\nu = \kappa + 1$

3.

Η χρησιμότητα της ανισότητας Bernoulli

Κατεβάζει τον εκθέτη ν στη βάση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι $2 + 4 + 6 + \ldots + 2\nu = \nu(\nu + 1)$ για κάθε θετικό ακέραιο ν

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 1$ η ισότητα γράφεται $2 = 1(1 + 1) \Leftrightarrow 2 = 2$ που είναι αληθής .

Δεχόμαστε αληθή την ισότητα για $\nu = \kappa$: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2\kappa = \kappa(\kappa + 1)$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι η ισότητα αληθεύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2\kappa + 2(\kappa + 1) = (\kappa + 1)(\kappa + 2)$$

Είναι $\underbrace{2+4+6+\ldots+2\kappa}_{\text{Α−μέλος της (1)}} + 2(\kappa+1) \overset{(1)}{=} \kappa(\kappa + 1) + 2(\kappa+1)$

$= (\kappa + 1)(\kappa + 2)$

2.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + \nu(\nu + 1)(\nu + 2) = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$$

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 1$ η ισότητα γράφεται $1\cdot2\cdot3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{4} \Leftrightarrow 6 = 6$ που είναι αληθής

Δεχόμαστε ότι η ισότητα αληθεύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή ότι

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + \kappa(\kappa + 1)(\kappa + 2) = \frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ισότητα αληθεύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + \kappa(\kappa + 1)(\kappa + 2) + (\kappa+1)(\kappa + 2)(\kappa + 3) = \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}{4}$$

$$1^{\text{ο}} \text{ μέλος} = \underbrace{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}_{\text{Α−μέλος της 1}} + (\kappa+1)(\kappa + 2)(\kappa + 3)$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{4} + (\kappa+1)(\kappa + 2)(\kappa + 3)$$

$$= \frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3) + 4(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{4}$$

$$= \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}{4}$$

3.

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2\nu-1)^2 = \frac{\nu(4\nu^2-1)}{3}$$

Προτεινόμενη λύση

Για ν = 1 η ισότητα γράφεται $1 = \frac{1(4\cdot 1^2-1)}{3} \Leftrightarrow 1 = 1$ που είναι προφανής .

Δεχόμαστε ότι η ισότητα αληθεύει για ν = κ , δηλαδή ότι

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2\kappa-1)^2 = \frac{\kappa(4\kappa^2-1)}{3} \qquad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ισότητα αληθεύει και για ν = κ + 1, δηλαδή ότι

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2\kappa-1)^2 + [2(\kappa+1)-1]^2 = \frac{(\kappa+1)[4(\kappa+1)^2-1]}{3}$$

$$\text{»} \qquad\qquad \text{»} \qquad = \frac{(\kappa+1)(4\kappa^2+8\kappa+3)}{3}$$

$$\text{»} \qquad\qquad \text{»} \qquad = \frac{4\kappa^3+12\kappa^2+11\kappa+3}{3}$$

$$1^{\text{ο}} \text{ μέλος } = \underbrace{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2\kappa-1)^2}_{\text{Α−μέλος της 1}} + [2(\kappa+1)-1]^2$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\kappa(4\kappa^2-1)}{3} + (2\kappa+1)^2$$

$$= \frac{\kappa(4\kappa^2-1)+3(2\kappa+1)^2}{3}$$

$$= \frac{\kappa(4\kappa^2-1)+3(2\kappa+1)^2}{3}$$

$$= \frac{\kappa(2\kappa-1)(2\kappa+1)+3(2\kappa+1)^2}{3}$$

$$= \frac{(2\kappa+1)[\kappa(2\kappa-1)+3(2\kappa+1)]}{3}$$

$$= \frac{(2\kappa+1)(2\kappa^2+5\kappa+3)}{3} = \frac{4\kappa^3+12\kappa^2+11\kappa+3}{3}$$

4.

Αν α, β ακέραιοι, δείξτε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει

$$(\alpha + \beta)^\nu = \alpha^\nu + \lambda\beta$$

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 1$ η ισότητα γράφεται $\alpha + \beta = \alpha + \lambda\,\beta \iff \alpha + \beta = \alpha + 1\cdot\beta$

υπάρχει ο $\lambda = 1$

Δεχόμαστε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Z}$, ώστε να ισχύει $(\alpha + \beta)^\kappa = \alpha^\kappa + \lambda\beta$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\lambda' \in \mathbb{Z}$, ώστε να ισχύει $(\alpha + \beta)^{\kappa+1} = \alpha^{\kappa+1} + \lambda'\beta$

$$
\begin{aligned}
1^{\text{ο}}\ \text{μέλος} = (\alpha + \beta)^{\kappa+1} = (\alpha + \beta)^\kappa(\alpha + \beta) &\overset{(1)}{=} (\alpha^\kappa + \lambda\beta)(\alpha + \beta) \\
&= \alpha^{\kappa+1} + \alpha^\kappa\beta + \lambda\alpha\beta + \lambda\beta^2 \\
&= \alpha^{\kappa+1} + \beta(\alpha^\kappa + \lambda\alpha + \lambda\beta) = \alpha^{\kappa+1} + \lambda'\beta
\end{aligned}
$$

Όπου $\lambda' = \alpha^\kappa + \lambda\alpha + \lambda\beta \in \mathbb{Z}$

5.

Δείξτε ότι $\nu \geq 2$ σημεία, τα οποία ανά τρία δεν είναι στην ίδια ευθεία ορίζουν $\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$ ευθείες

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 2$ σημεία ορίζεται 1 ευθεία και ισχύει $1 = \dfrac{2(2-1)}{2}$

Δεχόμαστε ότι για $\nu = \kappa$ σημεία ορίζονται $\dfrac{\kappa(\kappa-1)}{2}$ ευθείες **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa + 1$ σημεία ορίζονται $\dfrac{(\kappa+1)\kappa}{2}$ ευθείες

Το σημείο $A_{\kappa+1}$ με τα κ σημεία της (1) ορίζει κ νέες ευθείες.

Επομένως το πλήθος όλων των ευθειών θα είναι ίσο με το πλήθος των ευθειών που ορίζουν τα κ σημεία της (1) συν τις κ νέες ευθείες, δηλαδή

$$\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} + \kappa = \frac{\kappa(\kappa-1)+2\kappa}{2} = \frac{(\kappa+1)\kappa}{2}$$

6.

Να δείξετε ότι το πλήθος των διαγωνίων κάθε κυρτού πολυγώνου είναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$, όπου ν το πλήθος των κορυφών του πολυγώνου

Προτεινόμενη λύση

Το πρώτο κυρτό πολύγωνο που έχει διαγώνιες είναι το τετράπλευρο .

Για $\nu = 4$, το πλήθος των διαγωνίων είναι 2 και ισχύει $2 = \frac{4(4-3)}{2}$

Δεχόμαστε ότι ο για $\nu = \kappa$ το πλήθος των διαγωνίων είναι $\frac{\kappa(\kappa-3)}{2}$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι , για $\nu = \kappa + 1$ το πλήθος των διαγωνίων είναι $\frac{(\kappa+1)(\kappa-2)}{2}$

Η κορυφή $A_{\kappa+1}$ με τις κορυφές A_1, A_2, . . . , A_κ ορίζει κ το πλήθος ευθ. τμήματα , από τα οποία δύο είναι πλευρές και $\kappa - 2$ είναι διαγώνιοι.

Επί πλέον μία πλευρά του κ – γώνου γίνεται διαγώνιος του (κ + 1) – γώνου

Άρα το πλήθος των διαγωνίων θα είναι

$$\frac{\kappa(\kappa-3)}{2} + \kappa - 2 + 1 = \frac{\kappa(\kappa-3)}{2} + \kappa - 1 = \frac{\kappa^2-3\kappa+2\kappa-2}{2} = \frac{\kappa^2-\kappa-2}{2} = \frac{(\kappa+1)(\kappa-2)}{2}$$

7.

Να αποδείξετε ότι , για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $A = 7^{2\nu} + 16\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 0$ έχουμε $A = 7^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot 64$

Δεχόμαστε ότι , για $\nu = \kappa$ ο αριθμός A είναι πολλαπλάσιο του 64 , δηλαδή

$$A = 7^{2\kappa} + 16\kappa - 1 = 64\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι, για $\nu = \kappa + 1$ ο αριθμός A είναι πολλαπλάσιο του 64

δηλαδή ότι $7^{2(\kappa+1)} + 16(\kappa+1) - 1 = 64\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$

Είναι

$$\begin{aligned} A = 7^{2(\kappa+1)} + 16(\kappa+1) - 1 &= 7^{2\kappa+2} + 16\kappa + 16 - 1 \\ &= 7^2 \cdot 7^{2\kappa} + 16\kappa + 15 \\ &= 49 \cdot 7^{2\kappa} + 16\kappa + 15 \\ &\overset{(1)}{=} 49(64\lambda - 16\kappa + 1) + 16\kappa + 15 \\ &= 49 \cdot 64\lambda - 49 \cdot 16\kappa + 49 + 16\kappa + 15 \\ &= 49 \cdot 64\lambda - 48 \cdot 16\kappa + 64 \\ &= 49 \cdot 64\lambda - 4 \cdot 12 \cdot 16\kappa + 64 \\ &= 49 \cdot 64\lambda - 12 \cdot 64\kappa + 64 \\ &= 64(49\lambda - 12\kappa + 1) = 64\mu \end{aligned}$$

Όπου $\mu = 49\lambda - 12\kappa + 1 \in \mathbb{Z}$

8.

Δείξτε ότι ο αριθμός $3^{4\nu+2} + 2^{6\nu+3}$ είναι πολλαπλάσιο του 17 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 0$, ο αριθμός είναι $3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17 = 1\cdot 17$

Δεχόμαστε ότι, για $\nu = \kappa$ ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 17, δηλαδή ότι

$$3^{4\kappa+2} + 2^{6\kappa+3} = 17\lambda \;,\; \lambda \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 17 και για $\nu = \kappa + 1$,

δηλαδή ότι $3^{4(\kappa+1)+2} + 2^{6(\kappa+1)+3} = 17\mu \;,\; \mu \in \mathbb{Z}$

Είναι $3^{4(\kappa+1)+2} + 2^{6(\kappa+1)+3} = 3^{4\kappa+2+4} + 2^{6\kappa+3+6}$

$$= 3^4 \cdot 3^{4\kappa+2} + 2^6 \cdot 2^{6\kappa+3} \qquad \textbf{(2)}$$

Η (1) $\Rightarrow$ $3^{4\kappa+2} = 17\lambda - 2^{6\kappa+3}$

Οπότε η (2) γίνεται $3^{4(\kappa+1)+2} + 2^{6(\kappa+1)+3} = 81(17\lambda - 2^{6\kappa+3}) + 64\cdot 2^{6\kappa+3}$

$$= 17\cdot 81\lambda - 81\cdot 2^{6\kappa+3} + 64\cdot 2^{6\kappa+3}$$

$$= 17\cdot 81\lambda - 17\cdot 2^{6\kappa+3}$$

$$= 17(81\lambda - 2^{6\kappa+3}) = 17\mu$$

Όπου $\mu = 81\lambda - 2^{6\kappa+3} \in \mathbb{Z}$

9.

Δείξτε ότι, για κάθε $\nu \geq 4$ ισχύει : $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\nu} > \nu + 1$

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 4$ η ανισότητα γίνεται $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4} > 4 + 1 \Leftrightarrow \dfrac{81}{16} > 5$ που ισχύει.

Δεχόμαστε ότι η ανισότητα αληθεύει για $\nu = \kappa$ δηλαδή ότι $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\kappa} > \kappa + 1$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι η αληθεύει και για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\kappa+1} > \kappa + 2$

Είναι $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\kappa+1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\kappa}\dfrac{3}{2} \overset{(1)}{>} (\kappa+1)\dfrac{3}{2}$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $(\kappa+1)\dfrac{3}{2} > \kappa + 2$

$$3(\kappa+1) > 2(\kappa+2)$$

$$3\kappa + 3 > 2\kappa + 4$$

$\kappa > 1$ που ισχύει αφού $\kappa \geq 4$.

10.

Δείξτε ότι , για κάθε $\nu \geq 3$ ισχύει : $3^\nu > (\nu + 1)^2$

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 3$ η ανισότητα γίνεται $27 > 16$, που είναι αληθές

Δεχόμαστε ότι η ανισότητα ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή $3^\kappa > (\kappa + 1)^2$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $\nu = \kappa + 1$ δηλαδή : $3^{\kappa+1} > (\kappa + 2)^2$

Είναι $3^{\kappa+1} = 3 \cdot 3^\kappa \overset{(1)}{>} 3(\kappa + 1)^2$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $3(\kappa + 1)^2 > (\kappa + 2)^2$

$3\kappa^2 + 6\kappa + 3 > \kappa^2 + 4\kappa + 4$

$2\kappa^2 + 2\kappa - 1 > 0$

$2\kappa^2 + \kappa + \kappa - 1 > 0$ που ισχύει αφού $\kappa \geq 3$.

11.

Αν $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3, \ldots \alpha_\nu$ θετικοί αριθμοί και διάφοροι από το 1, να δείξετε ότι

$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_\nu) > 2^\nu \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 1$ έχουμε $1 + \alpha_1 > 2\sqrt{\alpha_1} \Leftrightarrow 1 + \alpha_1 - 2\sqrt{\alpha_1} > 0$

$\left(1 - \sqrt{\alpha_1}\right)^2 > 0$ που ισχύει αφού $\alpha_1 \neq 1$

Δεχόμαστε ότι η ανισότητα ισχύει για $\nu = \kappa$ δηλαδή ότι

$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_\kappa) > 2^\kappa \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι

$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_\kappa)(1 + \alpha_{\kappa+1}) > 2^{\kappa+1} \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa \cdot \alpha_{\kappa+1}}$ **(2)**

(1) $\Rightarrow$ $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_\kappa)(1 + \alpha_{\kappa+1}) > 2^\kappa \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa} \cdot (1 + \alpha_{\kappa+1})$

Από τη (2) , αρκεί να δειχθεί ότι

$2^\kappa \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa} \cdot (1 + \alpha_{\kappa+1}) > 2^{\kappa+1} \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa \cdot \alpha_{\kappa+1}}$

$\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa} \cdot (1 + \alpha_{\kappa+1}) > 2\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa} \sqrt{\alpha_{\kappa+1}}$

$1 + \alpha_{\kappa+1} > 2\sqrt{\alpha_{\kappa+1}}$

$1 + \sqrt{\alpha_{\kappa+1}}^2 - 2\sqrt{\alpha_{\kappa+1}} > 0$

$\left(1 - \sqrt{\alpha_{\kappa+1}}\right)^2 > 0$ που ισχύει

12.

Για πολυώνυμο $P(x)$ δίνεται ότι $P(x+y) = P(x) + P(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι

i) $P(0) = 0$

ii) $P(\nu) = P(1) \cdot \nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

iii) Το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - P(1)\,x$ έχει ρίζες όλους τους φυσικούς αριθμούς

iv) $P(x) = P(1)\,x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

Ονομάζουμε την $P(x+y) = P(x) + P(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ **(1)**

i)

Για $x = y = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $P(0+0) = P(0) + P(0)$

$P(0) = 2P(0)$

$P(0) = 0$ **(2)**

ii)

Ελέγχουμε αν η ισότητα $P(\nu) = P(1) \cdot \nu$ ισχύει για $\nu = 0$: $P(0) = P(1) \cdot 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$0 = 0$ ισχύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή ότι $P(\kappa) = P(1) \cdot \kappa$ **(3)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι $P(\kappa+1) = P(1) \cdot (\kappa + 1)$

Είναι $P(\kappa+1) \overset{(1)}{=} P(\kappa) + P(1) \overset{(3)}{=} P(1) \cdot \kappa + P(1) = P(1) \cdot (\kappa+1)$

iii)

Είναι $Q(\nu) = P(\nu) - P(1) \cdot \nu \overset{(ii)}{=} P(1) \cdot \nu - P(1) \cdot \nu = 0$

iv)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(x) - P(1)\,x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλαδή ότι $Q(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλαδή ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Τούτο συμβαίνει, αφού από το (iii), το $Q(x)$ έχει άπειρες ρίζες

13.

Για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$, να αποδείξετε ότι

i) $4^\nu > 1 + 3\nu$

ii) $4^\nu + 5^\nu > 7\nu + 2$

iii) $\left(\frac{4}{3}\right)^\nu > \frac{\nu}{3}$

iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^\nu < \frac{3}{\nu}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$4^\nu = (1 + 3)^\nu > 1 + 3\nu$

Bernoulli

ii)

$4^\nu = (1 + 3)^\nu > 1 + 3\nu$

$5^\nu = (1 + 4)^\nu > 1 + 4\nu$

Προσθέτουμε κατά μέλη: $4^\nu + 5^\nu > 7\nu + 2$

iii)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{3}\right)^\nu > 1 + \nu\,\frac{1}{3} = 1 + \frac{\nu}{3} > \frac{\nu}{3}$$

iv)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{3^\nu}{4^\nu} < \frac{3}{\nu}$

$$\frac{4^\nu}{3^\nu} > \frac{\nu}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^\nu > \frac{\nu}{3}$$ που αποδείχθηκε στο (iii)

14.

Αν $\theta > 1$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\theta} - 1 < (\theta - 1)\,\frac{1}{\nu}$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sqrt[\nu]{\theta} - 1 < \frac{\theta-1}{\nu}$

$$\sqrt[\nu]{\theta} < 1 + \frac{\theta-1}{\nu}$$

$$\theta < \left(1+\frac{\theta-1}{\nu}\right)^\nu$$

$$\left(1+\frac{\theta-1}{\nu}\right)^\nu > \theta$$

Bernoulli