4.2 – 4.3 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ – ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Θεώρημα

Αν $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ακέραιοι με $\boldsymbol{\beta \neq 0}$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι $\boldsymbol{\kappa}$ και $\boldsymbol{\upsilon}$, έτσι ώστε $\boldsymbol{\alpha = \kappa\beta + \upsilon}$ με $\boldsymbol{0 \leq \upsilon < \beta}$.

2.

Τέλεια διαίρεση

Αν το υπόλοιπο υ της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι ίσο με το 0 τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια.

3.

Άρτιος - Περιττός

Η διαίρεση ακεραίου α με το 2 δίνει υπόλοιπο $\upsilon = 0$ ή $\upsilon = 1$.

- Όταν $\upsilon = 0$, τότε $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και ο α λέγεται άρτιος
- Όταν $\upsilon = 1$, τότε $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και ο α λέγεται περιττός

4.

Οι δυνατές τιμές του υπολοίπου

$\upsilon = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ |\beta| - 1$

5.

Εφαρμογή σαν θεώρημα

Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός

6.

Ορισμός

Θα λέμε ότι ακέραιος $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ **διαιρεί τον ακέραιο** $\boldsymbol{\alpha}$ και θα γράφουμε $\boldsymbol{\beta \mid \alpha}$, όταν η διαίρεση του **α με τον β είναι τέλεια**, δηλαδή όταν $\boldsymbol{\alpha = \kappa\beta}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

7.

Ισοδύναμες εκφράσεις

$\beta \mid \alpha \iff$ β διαιρεί α
ο β είναι διαιρέτης ή παράγοντας του α
ο α διαιρείται με τον β
ο α είναι πολλαπλάσιο του β
α = πολβ

8.

$1^η$ ομάδα ιδιοτήτων

- Αν $\beta|\alpha$, τότε και $-\beta|\alpha$
- $\pm 1|\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$
- $\pm \alpha|\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}^*$
- Αν $\beta|\alpha$ τότε και $\kappa\beta|\kappa\alpha$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}^*$

9.

$2^η$ ομάδα ιδιοτήτων

- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$
- Αν $\alpha|\beta$ τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε ο $\alpha|(\beta+\gamma)$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε ο $\alpha|(\kappa\beta+\lambda\gamma)$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε ο $\alpha|(\beta-\gamma)$

2.

Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|(\beta+\gamma)$, τότε ο $\alpha|\gamma$

3.

Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|(\beta-\gamma)$, τότε ο $\alpha|\gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι

i) Το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος
ii) Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος
iii) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός
iv) Το γινόμενο δύο άρτιων είναι άρτιος
v) Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι άρτιος
vi) Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός
vii) Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι άρτιος
viii) Το τετράγωνο ενός περιττού είναι περιττός

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\alpha = 2\kappa$, $\beta = 2\lambda$, $\gamma = 2\mu + 1$, $\delta = 2\rho + 1$, $\kappa, \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{Z}$

i)
$\alpha + \beta = 2\kappa + 2\lambda = 2(\kappa + \lambda)$ άρτιος

ii)
$\gamma + \delta = 2\mu + 1 + 2\rho + 1 = 2(\mu + \rho + 1)$ άρτιος

iii)
$\alpha + \gamma = 2\kappa + 2\mu + 1 = 2(\kappa + \mu) + 1$ περιττός

iv)
$\alpha \cdot \beta = 2\kappa \cdot 2\lambda = 2(2\kappa\lambda)$ άρτιος

v)
$\alpha \cdot \gamma = 2\kappa(2\mu + 1) = 2[\kappa(2\mu + 1)]$ άρτιος

vi)
$$\begin{aligned}\gamma \cdot \delta &= (2\mu + 1)(2\rho + 1) = \\ &= 4\mu\rho + 2\mu + 2\rho + 1 \\ &= 2(2\mu\rho + \mu + \rho) + 1 \quad \text{περιττός}\end{aligned}$$

vii)
$\alpha^2 = 4\kappa^2 = 2(2\kappa^2)$ άρτιος

viii)
$\gamma^2 = 4\mu^2 + 4\mu + 1 = 2(2\mu^2 + 2\mu) + 1$ περιττός

2.

Δείξτε ότι, για κάθε ακέραιο αριθμό α, ο αριθμός $A = \alpha^2 + \alpha + 1$ είναι περιττός.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν ο α είναι άρτιος, δηλαδή $\alpha = 2\kappa,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A = \alpha^2 + \alpha + 1 &= (2\kappa)^2 + 2\kappa + 1 \\ &= 4\kappa^2 + 2\kappa + 1 \\ &= 2(2\kappa^2 + \kappa) + 1 \qquad (\text{θέτουμε } 2\kappa^2 + \kappa = \lambda) \\ &= 2\lambda + 1, \text{ που είναι περιττός} \end{aligned}$$

- Όταν ο α είναι περιττός, δηλαδή $\alpha = 2\kappa + 1,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A = \alpha^2 + \alpha + 1 &= (2\kappa + 1)^2 + (2\kappa + 1) + 1 \\ &= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 + 2\kappa + 1 + 1 \\ &= 4\kappa^2 + 6\kappa + 2 + 1 \\ &= 2(2\kappa^2 + 3\kappa + 1) + 1 \qquad (\text{θέτουμε } 2\kappa^2 + 3\kappa + 1 = \mu) \\ &= 2\mu + 1, \text{ που είναι περιττός} \end{aligned}$$

3.

Δείξτε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 4

Προτεινόμενη λύση

Από εφαρμογή γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

Άρα, το γινόμενο, έστω Γ, τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων είναι
$\Gamma = 2\mu \cdot 2\lambda = 4(\mu\lambda)$

4.

Δείξτε ότι ο αριθμός $\lambda(\lambda^2+2)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, είναι πολλαπλάσιο του 3.

Προτεινόμενη λύση

Θα είναι $\lambda = 3\kappa$ ή $\lambda = 3\kappa+1$ ή $\lambda = 3\kappa+2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

- Όταν $\lambda = 3\kappa$

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda^2+2) &= 3\kappa\left[(3\kappa)^2+2\right] = \\ &= 3\kappa(9\kappa^2+2) \qquad \left(\text{θέτουμε} \quad \kappa(9\kappa^2+2)=\lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{Z}\right) \\ &= 3\lambda \quad \text{πολλαπλάσιο του } 3. \end{aligned}$$

- Όταν $\lambda = 3\kappa+1$

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda^2+2) &= (3\kappa+1)\left[(3\kappa+1)^2+2\right] \\ &= (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+1+2) \\ &= (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+3) \\ &= 3(3\kappa+1)(3\kappa^2+2\kappa+1) \\ &= 3\mu \quad \text{πολλαπλάσιο του } 3 \end{aligned}$$

- Όταν $\lambda = 3\kappa+2$
  Ομοίως

5.

Αν α είναι άρτιος , δείξτε ότι **i)** $(\alpha+1)^2-1 = 4\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

ii) $\dfrac{\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha+3)^2-2\alpha+2}{4} = 3\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$

Προτεινόμενη λύση

α άρτιος $\Rightarrow$ $\alpha = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$

i)

$$\begin{aligned} (\alpha+1)^2-1 &= (2\nu+1)^2-1 \\ &= 4\nu^2+4\nu+1-1 \\ &= 4(\nu^2+\nu) = 4\lambda \ , \ \text{όπου} \quad \lambda = \nu^2+\nu \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha+3)^2-2\alpha+2}{4} &= \frac{(2\nu)^2+(2\nu+1)^2+(2\nu+3)^2-2(2\nu)+2}{4} \\ &= \frac{4\nu^2+4\nu^2+4\nu+1+4\nu^2+12\nu+9-4\nu+2}{4} \\ &= \frac{12\nu^2+12\nu+12}{4} \\ &= 3\nu^2+3\nu+3 \\ &= 3(\nu^2+\nu+1) \\ &= 3\mu\,, \quad \text{όπου} \quad \mu = \nu^2+\nu+1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6.

Θεωρούμε τους ακέραιους α της μορφής $\alpha = 6\kappa + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ και $\kappa, \upsilon \in \mathbb{Z}$.
Αν οι α δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3, να δείξετε ότι

i) $\alpha = 6\kappa + 1$ ή $\alpha = 6\kappa + 5$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ii) $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$.

iii) Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων από τους α είναι πολλαπλάσιο του 3.

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα είναι $\alpha = 6\kappa$ ή $\alpha = 6\kappa + 1$ ή $\alpha = 6\kappa + 2$
ή $\alpha = 6\kappa + 3$ ή $\alpha = 6\kappa + 4$ ή $\alpha = 6\kappa + 5$
και επειδή δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3, θα είναι

$$\alpha = 6\kappa + 1 \quad ή \quad \alpha = 6\kappa + 5$$

ii)

- Όταν $\alpha = 6\kappa + 1$

$$\begin{aligned} \alpha^2 = (6\kappa + 1)^2 &= 36\kappa^2 + 12\kappa + 1 \\ &= 3(12\kappa^2 + 4\kappa) + 1 \\ &= 3\mu + 1 \end{aligned}$$

- Όταν $\alpha = 6\kappa + 5$

$$\begin{aligned} \alpha^2 = (6\kappa + 5)^2 &= 36\kappa^2 + 60\kappa + 25 \\ &= 36\kappa^2 + 60\kappa + 24 + 1 \\ &= 3(12\kappa^2 + 20\kappa + 8) + 1 \\ &= 3\nu + 1 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 &\overset{(ii)}{=} 3\mu + 1 - 3\nu - 1 \\ &= 3(\mu - \nu) \\ &= 3\lambda = \pi o\lambda 3 \end{aligned}$$

7.

Αν $7|(\alpha + 5)$ και $7|(40 - \beta)$, να αποδείξετε ότι $7|(\alpha + \beta)$

Προτεινόμενη λύση

$7|(\alpha + 5) \Rightarrow \alpha + 5 = 7\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$7|(40 - \beta) \Rightarrow 40 - \beta = 7\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε : $\alpha + 5 - 40 + \beta = 7\kappa - 7\lambda$

$$\alpha + \beta = 35 + 7\kappa - 7\lambda$$

$$\alpha + \beta = 7(5 + \kappa - \lambda) \Rightarrow 7|\,\alpha + \beta$$

8.

Για κάθε $\nu \geq 3$, δείξτε ότι ο αριθμός $A_\nu = 2^{2\nu+1} - 9\nu^2 + 3\nu - 2$ είναι πολ54

Προτεινόμενη λύση

Για $\nu = 3$ είναι $A_3 = 2^{2\cdot 3+1} - 9\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 2$

$= 2^7 - 9\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 2$

$= 128 - 81 + 7 = 54 = 1\cdot 54 = \text{πολ}54$

Δεχόμαστε ότι το αποδεικτέο ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή

$$A_\kappa = 2^{2\kappa+1} - 9\kappa^2 + 3\kappa - 2 = \text{πολ}54 = 54\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι ο

$$A_{\kappa+1} = 2^{2(\kappa+1)+1} - 9(\kappa+1)^2 + 3(\kappa+1) - 2 \quad \text{είναι} \quad \text{πολ}54$$

Είναι $A_{\kappa+1} = 2^{2(\kappa+1)+1} - 9(\kappa+1)^2 + 3(\kappa+1) - 2$

$= 2^{2\kappa+1+2} - 9(\kappa+1)^2 + 3(\kappa+1) - 2$

$= 2^{2\kappa+1}\cdot 2^2 - 9(\kappa+1)^2 + 3(\kappa+1) - 2 \qquad \textbf{(2)}$

Όμως η (1) $\Leftrightarrow$ $2^{2\kappa+1} - 9\kappa^2 + 3\kappa - 2 = 54\lambda + 9\kappa^2 - 3\kappa + 2$

Η (2) γίνεται $A_{\kappa+1} = 2^{2(\kappa+1)+1} - 9(\kappa+1)^2 + 3(\kappa+1) - 2$

$= 4(54\lambda + 9\kappa^2 - 3\kappa + 2) - 9(\kappa+1)^2 + 3(\kappa+1) - 2$

$= 4\cdot 54\lambda + 36\kappa^2 - 12\kappa + 8 - 9\kappa^2 - 18\kappa - 9 + 3\kappa + 3 - 2$

$= 4\cdot 54\lambda + 27\kappa^2 - 27\kappa = 4\cdot 54\lambda + 27\kappa(\kappa-1) \qquad \textbf{(3)}$

Όμως ο $\kappa(\kappa-1)$ είναι γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων, οπότε $\kappa(\kappa-1) = 2\mu$

Η (3) γίνεται $A_{\kappa+1} = 4\cdot 54\lambda + 27\cdot 2\rho$

$= 54(4\lambda + \rho) =$

$= 54\,\mu = \text{πολ}54$

9.

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \kappa - 1$ και $\beta = 5\kappa + 6$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι

i) Αν ο α είναι άρτιος, τότε ο β είναι περιττός

ii) Ο αριθμός $3\beta - 4\alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $\alpha = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ τότε $2\lambda = \kappa - 1 \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda + 1$.

Οπότε $\beta = 5\,(2\lambda + 1) + 6 = 10\lambda + 11$

$= 10\lambda + 10 + 1$

$= 2(5\lambda + 5) + 1$

$= 2\mu + 1$, όπου $\mu = 5\lambda + 5 \in \mathbb{Z}$

ii)

$3\beta - 4\alpha = 3(5\kappa + 6) - 4(\kappa - 1)$

$= 15\kappa + 18 - 4\kappa + 4$

$= 11\kappa + 22$

$= 11(\kappa + 2) = 11\rho$, όπου $\rho = \kappa + 2 \in \mathbb{Z}$

10.

Αν α ακέραιος, $\beta = 3\alpha + 4$ και $\gamma = 4\alpha + 5$, δείξτε ότι ο $\beta\gamma - (\beta + \gamma)$ είναι περιττός.

Προτεινόμενη λύση

$\beta\gamma - (\beta + \gamma) = (3\alpha + 4)(4\alpha + 5) - (3\alpha + 4 + 4\alpha + 5)$

$= 12\alpha^2 + 15\alpha + 16\alpha + 20 - 7\alpha - 9$

$= 12\alpha^2 + 24\alpha + 11$

$= 12\alpha^2 + 24\alpha + 10 + 1$

$= 2(6\alpha^2 + 12\alpha + 5) + 1 = 2\mu + 1 =$ περιττός, όπου $\mu = 6\alpha^2 + 12\alpha + 5 \in \mathbb{Z}$

11.

Δίνεται ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων α και β με το 5 είναι 2.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2-2003$ είναι πολλαπλάσιο του 5

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $8\alpha+9\beta$ με το 5.

Προτεινόμενη λύση

i)

Από την υπόθεση έχουμε $\alpha=5\pi+2$ και $\beta=5\kappa+2$, $\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$.

$$\alpha^2+\beta^2-2003 = 25\pi^2+20\pi+4+25\kappa^2+20\kappa+4-2003$$
$$= 25\pi^2+20\pi+25\kappa^2+20\kappa-1995 =$$
$$= 5(5\pi^2+4\pi+5\kappa^2+4\kappa-399) = 5\nu = \text{πολ}5$$

Όπου $\nu=5\pi^2+4\pi+5\kappa^2+4\kappa-399\in\mathbb{Z}$

ii)

$$8\alpha+9\beta = 8(5\pi+2)+9(5\kappa+2)$$
$$= 40\pi+16+45\kappa+18$$
$$= 40\pi+45\kappa+34 =$$
$$= 40\pi+45\kappa+30+4 =$$
$$= 5(8\pi+9\kappa+6)+4 = 5\gamma+4$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $(8\alpha+9\beta):5$ είναι $\upsilon=4$

12.

Αν $3\mu+6=\text{πολ}\alpha$ και $5\mu+7=\text{πολ}\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{Z}^*$, να βρείτε τις πιθανές τιμές του α

Προτεινόμενη λύση

$3\mu+6=\text{πολ}\alpha$ και $5\mu+7=\text{πολ}\alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha\mid(3\mu+6)$ και $\alpha\mid(5\mu+7)$

$\alpha\mid 5(3\mu+6)$ και $\alpha\mid 3(5\mu+7)$

$\alpha\mid(15\mu+30)$ και $\alpha\mid(15\mu+21)$

$\alpha\mid[(15\mu+30)-(15\mu+21)]$

$\alpha\mid(15\mu+30-15\mu-21)$

$\alpha\mid 9$

οπότε $\alpha=\pm1$ ή $\alpha=\pm3$ ή $\alpha=\pm9$

13.

Αν οι ακέραιοι $\alpha+3$, $30-\beta$ διαιρούνται με το 9, να αποδείξετε ότι και ο $\alpha+\beta$ διαιρείται με το 9.

Προτεινόμενη λύση

$9 \mid \alpha+3 \iff \alpha+3=9\kappa \iff \alpha=9\kappa-3$

$9 \mid 30-\beta \iff 30-\beta=9\lambda \iff \beta=30-9\lambda$

Οπότε $\alpha+\beta = 9\kappa-9\lambda+27$

$= 9(\kappa-\lambda+3)=9\mu$

14.

Δείξτε ότι : $19|(8\alpha+11\beta)$ τότε και μόνο τότε $19|(11\alpha+8\beta)$

Προτεινόμενη λύση

$19|(8\alpha+11\beta) \iff 8\alpha+11\beta=19\rho$

$19\alpha-11\alpha+19\beta-8\beta=19\rho$

$-11\alpha-8\beta=19\rho-19\alpha-19\beta$

$11\alpha+8\beta=19\alpha+19\beta-19\rho$

$11\alpha+8\beta=19(\alpha+\beta-\rho) \iff 19 \mid 11\alpha+8\beta$

15.

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha \mid (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, δείξτε ότι $\alpha \mid \beta^2$

Προτεινόμενη λύση

$\alpha \mid \alpha^2$ και $\alpha \mid \alpha\beta \Rightarrow \alpha \mid (\alpha^2+\alpha\beta)$

Και επειδή $\alpha \mid (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, θα διαιρεί και τη διαφορά τους β^2

16.
Να βρείτε τον $\nu \in \mathbb{N}^*$ ώστε $(\nu + 2) \mid (\nu^2 + 4)$
Προτεινόμενη λύση

i)
Ισχύει $\nu^2 + 4 = \nu^2 - 4 + 8 = (\nu + 2)(\nu - 2) + 8$

Επομένως $(\nu + 2) \mid (\nu^2 + 4) \Leftrightarrow (\nu + 2) \mid (\nu + 2)(\nu - 2) + 8$

$(\nu + 2) \mid 8$

$\nu + 2$ διαιρέτης του 8

$\nu + 2 = \pm 1 , \ \pm 2 , \ \pm 4 , \ \pm 8$ **(1)**

Αλλά $\nu > 0 \Rightarrow \nu + 2 > 2$

Η (1) γίνεται $\nu + 2 = 4$ ή $\nu + 2 = 8$

$\nu = 2$ ή $\nu = 6$

17.
Αν $\alpha , \beta , \gamma , \delta , \kappa \in \mathbb{Z}$ και $\kappa \mid (\alpha\beta - 1)$, και $\kappa \mid (\alpha\delta + \gamma)$, δείξτε ότι $\kappa \mid (\beta\gamma + \delta)$
Προτεινόμενη λύση

$\kappa \mid (\alpha\beta - 1)$ και $\kappa \mid (\alpha\delta + \gamma) \Rightarrow \kappa \mid \delta(\alpha\beta - 1)$ και $\kappa \mid \beta(\alpha\delta + \gamma) \Rightarrow$

$\kappa \mid (\alpha\beta\delta - \delta)$ και $\kappa \mid (\alpha\beta\delta + \beta\gamma)$

$\kappa \mid [(\alpha\beta\delta + \beta\gamma) - (\alpha\beta\delta - \delta)]$

$\kappa \mid (\beta\gamma + \delta)$

18.
Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι διαιρούμενοι με το 4 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπόλοιπου
Προτεινόμενη λύση

Έστω x ζητούμενος ακέραιος. Τότε $x = 4\pi + \upsilon$, με $\upsilon = 0 , 1, 2, 3$

Αλλά $\pi = 2\upsilon$

Άρα $x = 4 \cdot 2\upsilon + \upsilon$

$x = 9\upsilon$ με $\upsilon = 0 , 1, 2, 3$

$x = 0$ ή 9 ή 18 ή 27

Η τιμή $x = 0$ απορρίπτεται αφού $x > 0$

19.

Δείξτε ότι $3|(\nu^3 + 2\nu)$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

Προτεινόμενη λύση

Θα είναι $\nu = 3\lambda$ ή $\nu = 3\lambda + 1$ ή $\nu = 3\lambda + 2$

- Όταν $\nu = 3\lambda$

  $\nu^3 + 2\nu = 27\lambda^3 + 6\lambda = 3(9\lambda^3 + 2\lambda)$

- Όταν $\nu = 3\lambda + 1$

  $$\begin{aligned} \nu^3 + 2\nu &= (3\lambda + 1)^3 + 2(3\lambda + 1) \\ &= (3\lambda + 1)[(3\lambda + 1)^2 + 2] \\ &= (3\lambda + 1)(9\lambda^2 + 6\lambda + 3) \\ &= 3(3\lambda + 1)(3\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 3\pi \end{aligned}$$

Ομοίως όταν $\nu = 3\lambda + 2$

20.

Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι **i)** $2 \mid (\alpha^4 + \alpha)$

ii) $\alpha^2 = 5\kappa$ ή $\alpha^2 = 5\kappa \pm 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

- Όταν $\alpha = 2\kappa$

  $\alpha^4 + \alpha = \alpha(\alpha^3 + 1)$

  $= 2\kappa(8\kappa^3 + 1) = 2\mu$

- Όταν $\alpha = 2\kappa + 1$

  $\alpha^4 + \alpha = \alpha(\alpha^3 + 1) = (2\kappa + 1)[(2\kappa + 1)^3 + 1]$

  $= (2\kappa + 1)(8\kappa^3 + 12\kappa^2 + 6\kappa + 1 + 1)$

  $= (2\kappa + 1)(8\kappa^3 + 12\kappa^2 + 6\kappa + 2) =$

  $= (2\kappa + 1)\ 2(4\kappa^3 + 6\kappa^2 + 3\kappa + 1) = 2\nu$

ii)

Θα είναι $\alpha = 5\pi$ ή $\alpha = 5\pi + 1$ ή $\alpha = 5\pi + 2$ ή $\alpha = 5\pi + 3$ ή $\alpha = 5\pi + 4$

- Όταν $\alpha = 5\pi$

  $\alpha^2 = 25\pi^2 = 5(5\pi^2) = 5\kappa$

- Όταν $\alpha = 5\pi + 1$

  $\alpha^2 = 25\pi^2 + 10\pi + 1 = 5(5\pi^2 + 2\pi) + 1 = 5\kappa + 1$

- Όταν $\alpha = 5\pi + 2$

  $\alpha^2 = 25\pi^2 + 20\pi + 4 = 25\pi^2 + 20\pi + 5 - 1$

  $= 5(5\pi^2 + 4\pi + 1) - 1 = 5\kappa - 1$

Ομοίως για τις υπόλοιπες μορφές

21.

Ο 2004, όταν διαιρεθεί με τον θετικό ακέραιο α, δίνει πηλίκο 44 και υπόλοιπο υ. Να βρείτε τους α και υ.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $2004 = 44\alpha + \upsilon$ και $0 \le \upsilon < \alpha \iff$

$\upsilon = 2004 - 44\alpha$ **(1)** και $0 \le 2004 - 44\alpha < \alpha$ **(2)**

(2) $\iff 0 \le 2004 - 44\alpha$ και $2004 - 44\alpha < \alpha$

$44\alpha \le 2004$ και $2004 < 45\alpha$

$\alpha \le \dfrac{501}{11} \approx 45{,}5$ και $\alpha > \dfrac{2004}{45} \approx 44{,}5 \iff \alpha = 45$

Η (1) δίνει $\upsilon = 2004 - 44 \cdot 45 = 24$

22.
Αν $3\lambda - 2\kappa = 5$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$, να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $\kappa : 3$ και $\lambda : 2$

Προτεινόμενη λύση

$3\lambda - 2\kappa = 5 \Leftrightarrow 2\kappa = 3\lambda - 5 \Leftrightarrow \kappa = \dfrac{3\lambda - 5}{2} \in \mathbb{Z}$ **(1)**

Θα είναι $\lambda = 2\nu$ ή $\lambda = 2\nu + 1$

- Για $\lambda = 2\nu$, η (1) $\Rightarrow \kappa = \dfrac{3 \cdot 2\nu - 5}{2} = \dfrac{6\nu - 4 - 1}{2} = 3\nu - 2 - \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Για $\lambda = 2\nu + 1$, η (1) $\Rightarrow \kappa = \dfrac{3(2\nu+1) - 5}{2}$

$$= \frac{6\nu + 3 - 5}{2} = \frac{6\nu - 2}{2} = (3\nu - 1) \in \mathbb{Z}$$

Άρα $\lambda = 2\nu + 1$, οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $\lambda : 2$ είναι $\upsilon = 1$

Για $\lambda = 2\nu + 1$, η $3\lambda - 2\kappa = 5 \Leftrightarrow 6\nu + 3 - 2\kappa = 5$

$2\kappa = 6\nu - 2$

$\kappa = 3\nu - 1$

$\kappa = 3\nu - 3 + 2$

$\kappa = 3(\nu - 1) + 2$

$\kappa = 3\nu' + 2$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $\kappa : 3$ είναι ίσο με $\upsilon' = 2$

23.
Να δείξετε ότι ο αριθμός 2004 δεν μπορεί να γραφεί με μορφή αθροίσματος 399 προσθετέων καθένας από τους οποίους είναι ίσος με 5 ή 7 ή 11 .

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι μπορεί να γραφεί και x είναι τα 5-αρια , y τα 7-αρια και z τα 11-αρια

Τότε $x + y + z = 399$ **(1)** και $5x + 7y + 11z = 2004$ **(2)**

(1) $\Leftrightarrow x = 399 - y - z$

Τότε η (2) $\Leftrightarrow 5(399 - y - z) + 7y + 11z = 2004 \Leftrightarrow$

$2y + 6z = 9 \Leftrightarrow$

$2(y + 3z) = 9$

Πράγμα άτοπο αφού το πρώτο μέλος είναι άρτιος ενώ το δεύτερο περιττός.

24.

Έστω οι θετικοί ακέραιοι α, β, γ για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha < 4 \ , \quad \beta < 3 \quad \text{και} \quad \alpha + 4\beta + 12\gamma = 82$$

i) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $82 : 4$

ii) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$

iii) Να βρείτε τις τιμές των β και γ

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha + 4\beta + 12\gamma = 82 \quad \Leftrightarrow \quad 82 = 4(\beta + 3\gamma) + \alpha \quad$ με $\quad 0 < \alpha < 4$

αυτό σημαίνει ότι η διαίρεση $82: 4$ έχει πηλίκο $\beta + 3\gamma$ και υπόλοιπο α

ii)

Ισχύει $82 = 4{\cdot}20 + 2$ και επειδή το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας διαίρεσης είναι

μοναδικά , με βάση το (i) θα είναι $\beta + 3\gamma = 20$ και $\alpha = 2$

iii)

Αφού $20 = 3\gamma + \beta$ και $\beta < 3$

αυτό σημαίνει ότι η διαίρεση $20 : 3$ έχει πηλίκο γ και υπόλοιπο β

Όμως $20 = 3{\cdot}6 + 2$

Πάλι λόγω της μοναδικότητας πηλίκου και υπόλοιπου, έχουμε $\gamma = 6$ και $\beta = 2$

25.

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha = 12\kappa - 5$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

i) Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του 4

iii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha = 12\kappa - 5 = 12\kappa - 6 + 1 = 2(6\kappa - 3) + 1 = 2\nu + 1$, οπότε α περιττός

ii)

$\alpha = 12\kappa - 8 + 3 = 4(3\kappa - 2) + 3 = 4\pi + 3 \qquad$ υπόλοιπο 3

iii)

Επειδή $\alpha =$ περιττός θα είναι $\alpha^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

Άρα $A = (8\lambda + 1 + 15)(8\lambda + 1 - 1) =$

$$= (8\lambda + 16)\,8\lambda$$

$$= 8\lambda{\cdot}8(\lambda + 2)$$

$$= 64\lambda(\lambda + 2) = \text{πολ}64$$

26.

Αν ρ, λ ακέραιοι με $4\rho + 1 = 3\lambda$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\rho : 3$ είναι 2.

Προτεινόμενη λύση

Θα είναι $\rho = 3\kappa$ ή $\rho = 3\kappa + 1$ ή $\rho = 3\kappa + 2$

- Για $\rho = 3\kappa$, η $4\rho + 1 = 3\lambda \Rightarrow 4 \cdot 3\kappa + 1 = 3\lambda$
  $1 = 3\lambda - 12\kappa$
  $1 = 3(\lambda - 4\kappa)$
  $3 \mid 1$ που είναι άτοπο

- Για $\rho = 3\kappa + 1$, η $4\rho + 1 = 3\lambda \Rightarrow 4 \cdot (3\kappa + 1) + 1 = 3\lambda$
  $12\kappa + 4 + 1 = 3\lambda$
  $5 = 3\lambda - 12\kappa$
  $5 = 3(\lambda - 4\kappa)$
  $3 \mid 5$ που είναι άτοπο

- Άρα $\rho = 3\kappa + 2$, οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $\rho : 3$ είναι 2.

27.

i) Δείξτε ότι $\nu(\nu^2+5) = \pi o\lambda 3$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

ii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν $x, y \in \mathbb{N}^*$ ώστε $x^3 - y^3 = 1999 - 5(x-y)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Ο ν μπορεί να πάρει τη μορφή $\nu = 3\kappa$ ή $\nu = 3\kappa + 1$ ή $\nu = 3\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$

- Αν $\nu = 3\kappa$ τότε $\nu(\nu^2+5) = 3\kappa(9\kappa^2+5) = \pi o\lambda 3$
- Αν $\nu = 3\kappa+1$ τότε $\nu(\nu^2+5) = (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+5+1)$
$$= (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+6)$$
$$= (3\kappa+1)3(3\kappa^2+2\kappa+2) = \pi o\lambda 3,$$
- Αν $\nu = 3\kappa+2$ τότε $\nu(\nu^2+5) = (3\kappa+2)(9\kappa^2+12\kappa+4+5)$
$$= (3\kappa+2)(9\kappa^2+12\kappa+9)$$
$$= (3\kappa+2)3(3\kappa^2+4\kappa+3) = \pi o\lambda 3$$

ii)

Έστω ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{N}^*$ ώστε $x^3 - y^3 = 1999 - 5(x-y) \Leftrightarrow$

$$x^3 - y^3 = 1999 - 5x + 5y$$
$$x^3 - y^3 + 5x - 5y = 1999$$
$$x(x^2+5) - y(y^2+5) = 1999 \overset{(i)}{\Leftrightarrow}$$
$$3\kappa - 3\lambda = 1999$$
$$3(\kappa - \lambda) = 1999$$
$$3 \mid 1999 \quad \text{που είναι άτοπο.}$$

Οπότε δεν υπάρχουν $x, y \in \mathbb{N}^*$ ώστε $x^3 - y^3 = 1999 - 5(x-y)$