

1.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΣΧΟΛΙΟ

Για τη λύση του προβλήματος : Διαβάζουμε με μεγάλη προσοχή το πρόβλημα
 Ξεχωρίζουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα
 Συμβολίζουμε τον άγνωστο με μία μεταβλητή
 Καταστρώνουμε την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα και την επιλύουμε

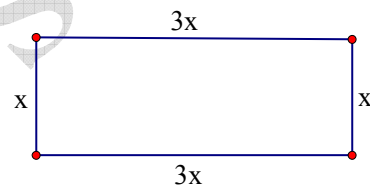
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σ' ένα ορθογώνιο, μία διάσταση είναι τριπλάσια της άλλης . Αν η περίμετρος είναι 48 cm, να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η μικρότερη διάσταση τότε η μεγαλύτερη είναι $3x$ και αφού η περίμετρος είναι 48, έχουμε την εξίσωση $x + 3x + x + 3x = 48$
 $8x = 48$
 $x = 6$



Συνεπώς οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι η μία 6 cm και η άλλη $3 \cdot 6 = 18$ cm
 Άρα το εμβαδόν E είναι $E = 6 \cdot 18 = 108 \text{ cm}^2$

2.

Ο Κώστας αγόρασε 20 m ύφασμα με έκπτωση 8% και πλήρωσε 160 ευρώ.
 Να βρεθεί πόσο κόστιζε το μέτρο το ύφασμα. πριν την έκπτωση.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η αξία του υφάσματος πριν την έκπτωση.

Τότε η έκπτωση είναι $\frac{8}{100} \cdot x = 0,08x$

Επομένως τα χρήματα που δόθηκαν για την αγορά του υφάσματος είναι $x - 0,08x = 0,92x$.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $0,92x = 160$ άρα $x = \frac{160}{0,92} = 173,91$ ευρώ

Επομένως κάθε μέτρο του υφάσματος κόστιζε πριν την έκπτωση

$$\frac{173,91}{20} = 8,70 \text{ ευρώ}$$

3.

Ο Πέτρος αγόρασε ένα τραπέζι με συντελεστή Φ.Π.Α. 16% και πλήρωσε συνολικά 102,13 ευρώ. Να βρεθεί η αξία του τραπεζιού χωρίς τον Φ.Π.Α.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η αξία του τραπεζιού χωρίς τον ΦΠΑ.

Τότε ο ΦΠΑ είναι $\frac{16}{100} \cdot x = 0,16x$

Επομένως τα χρήματα που δόθηκαν για την αγορά του τραπεζιού είναι $x + 0,16x = 1,16x$

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $1,16x = 102,13$ άρα $x = \frac{102,13}{1,16} = 88$ ευρώ

Επομένως το τραπέζι πριν την έκπτωση κόστιζε 88 ευρώ

4.

Να βρεθούν δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 72 και το τετραπλάσιο του μεγαλύτερου να ισούται με το πενταπλάσιο του μικρότερου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x ο πιο μικρός αριθμός τότε ο μεγαλύτερος είναι $72 - x$.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε

$$\begin{aligned} 4(72 - x) &= 5x \\ 288 - 4x &= 5x \\ 288 &= 9x \\ x &= \frac{288}{9} = 32 \end{aligned}$$

Επομένως ο μικρότερος αριθμός είναι το 32 και ο μεγαλύτερος το $72 - 32 = 40$

5.

Ο πατέρας του Νίκου είναι 26 χρόνια μεγαλύτερος από τον Νίκο. Αν πριν 5 χρόνια οι ηλικίες τους είχαν άθροισμα 40, να βρεθεί η ηλικία καθενός.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η σημερινή ηλικία του Νίκου.

Τότε η σημερινή ηλικία του πατέρα του είναι $x + 26$

Πριν 5 χρόνια οι ηλικίες ήταν $x - 5$ και $x + 26 - 5$ αντίστοιχα.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε

$$\begin{aligned} x - 5 + x + 26 - 5 &= 40 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Επομένως ο Νίκος σήμερα είναι 12 ετών και ο πατέρας του $12 + 26 = 38$ ετών

6.

Ένας πτηνοτρόφος πούλησε το $\frac{1}{3}$ των αυγών που είχε και 2 ακόμη, μετά πούλησε τα $\frac{4}{5}$ των υπολοίπων και 2 ακόμη. Έτσι του έμειναν 28 αυγά. Να βρεθεί πόσα αυγά είχε.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι ο πτηνοτρόφος είχε x αυγά.

Το πλήθος των αυγών που πούλησε την πρώτη φορά είναι $\frac{1}{3}x + 2$

Επομένως του έμειναν $x - \left(\frac{1}{3}x + 2\right) = x - \frac{1}{3}x - 2 = \frac{2}{3}x - 2$

Το πλήθος των αυγών που πούλησε την δεύτερη φορά είναι $\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}x - 2\right) + 2$

Επομένως του έμειναν $\frac{2}{3}x - 2 - \left[\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}x - 2\right) + 2\right] =$

$$\frac{2}{3}x - 2 - \left(\frac{8}{15}x - \frac{8}{5} + 2\right) =$$

$$\frac{2}{3}x - 2 - \frac{8}{15}x + \frac{8}{5} - 2 =$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{8}{15}x + \frac{8}{5} - 4$$

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $\frac{2}{3}x - \frac{8}{15}x + \frac{8}{5} - 4 = 28$

$$15 \cdot \frac{2}{3}x - 15 \cdot \frac{8}{15}x + 15 \cdot \frac{8}{5} - 15 \cdot 4 = 15 \cdot 28$$

$$10x - 8x + 24 - 60 = 420$$

$$2x = 420 - 24 + 60$$

$$2x = 456 \text{ άρα}$$

$$x = 228$$

Συνεπώς ο πτηνοτρόφος είχε 228 αυγά.

7.

Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, ώστε το μισό του μικρότερου συν το $\frac{1}{3}$ του μεγαλύτερου να ισούται με τον μεσαίο ελαττωμένο κατά 3 .

Προτεινόμενη λύση

Έστω x ο μικρότερος.

Τότε η ζητούμενη τριάδα των αριθμών σε αύξουσα σειρά είναι $x, x+1, x+2$.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x+2) = x+1-3$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x+2) = x-2 \quad \text{ΕΚΠ}(2,3)=6$$

$$6 \cdot \frac{1}{2}x + 6 \cdot \frac{1}{3}(x+2) = 6x - 6 \cdot 2$$

$$3x + 2(x+2) = 6x - 12$$

$$3x + 2x + 4 = 6x - 12$$

$$x = 16$$

Επομένως οι τρεις αριθμοί είναι οι 16 , 17, 18

8.

Μία βρύση γεμίζει μία δεξαμενή σε 12 λεπτά, μία άλλη σε 20 λεπτά και μία τρίτη σε 30 λεπτά.

Να βρεθεί σε πόσα λεπτά θα γεμίσει η δεξαμενή αν τρέχουν και οι τρεις βρύσες μαζί.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι η δεξαμενή θα γεμίσει σε x λεπτά τρέχοντας και οι τρεις βρύσες μαζί .

Η πρώτη βρύση γεμίζει την δεξαμενή σε 12 λεπτά.

Οπότε στο 1 λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{12}$ της δεξαμενής

και σε x λεπτά γεμίζει τα $\frac{x}{12}$ της δεξαμενής

Ομοίως οι άλλες βρύσες, σε x λεπτά γεμίζουν τα $\frac{x}{20}$ και $\frac{x}{30}$ της δεξαμενής

αντίστοιχα

Οπότε σε x λεπτά κάθε μία βρύση γεμίζει τα :

$$\frac{x}{12} = \frac{5x}{60}, \quad \frac{x}{20} = \frac{3x}{60}, \quad \frac{x}{30} = \frac{2x}{60} \quad \text{της δεξαμενής αντίστοιχα}$$

Τρέχοντας και οι τρεις μαζί για x λεπτά γεμίζει η δεξαμενή,

άρα γεμίζουν τα $\frac{60}{60}$ της δεξαμενής.

$$\text{Επομένως ισχύει ότι } \frac{5x}{60} + \frac{3x}{60} + \frac{2x}{60} = \frac{60}{60}$$

$$5x + 3x + 2x = 60$$

$$10x = 60$$

$$x = 6$$

Δηλαδή η δεξαμενή θα γεμίσει σε 6 λεπτά.

9.

Ο Νίκος δάνεισε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του με 3 % και τα υπόλοιπα με 4 %.

Μετά ένα χρόνο πήρε τόκο 1300 €.

Να βρεθεί πόσα χρήματα είχε ο Νίκος, πόσα δάνεισε με 3 % και πόσα με 4 %.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι ο Νίκος είχε x ευρώ, τότε τα $\frac{3}{4}$ αυτών είναι $\frac{3}{4}x$

Ο τόκος αυτού του ποσού για έναν χρόνο είναι $\frac{3}{100} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{9}{400}x$

Το υπόλοιπο ποσό είναι $\frac{1}{4}x$ και ο τόκος του για ένα χρόνο είναι

$$\frac{4}{100} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{100}x$$

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $\frac{9}{400}x + \frac{1}{100}x = 1300$

$$400 \cdot \frac{9}{400}x + 400 \cdot \frac{1}{100}x = 400 \cdot 1300$$

$$9x + 4x = 520000$$

$$13x = 520000$$

$$x = 40000$$

Άρα ο Νίκος είχε 40000 ευρώ και δάνεισε με 3% τα $\frac{3}{4} \cdot 40000 = 30000$ ευρώ

και με 4% το υπόλοιπο ποσό των 10000 ευρώ

10.

Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 80cm. Να βρεθούν οι πλευρές του αν κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι κατά 7 cm μεγαλύτερη από την βάση του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x το μήκος της βάσης.

Τότε κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι $x + 7$

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $x + 7 + x + 7 + x = 80$

$$3x = 66$$

$$x = 22$$

Δηλαδή η βάση είναι 22 cm και κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι $22 + 7 = 29$ cm .

11.

Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μεγαλύτερη ισούται με το τετραπλάσιο της μικρότερης ελαττωμένο κατά 20° , να βρεθούν οι δύο γωνίες.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η μικρότερη γωνία τότε η μεγαλύτερη είναι $4x - 20$ και αφού οι γωνίες είναι συμπληρωματικές, έχουμε $x + 4x - 20 = 90$

$$5x = 110$$

$$x = 22$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η μικρότερη γωνία είναι 22° και η μεγαλύτερη $90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$

12.

Σ' ένα αγρόκτημα υπάρχουν ζώα (κότες και κατσίκες). Αν τα ζώα έχουν συνολικά 120 πόδια και 50 κεφάλια, να βρεθεί πόσες είναι οι κότες και πόσες οι κατσίκες.

Προτεινόμενη λύση

Είναι φανερό ότι, αφού όλα τα ζώα έχουν 50 κεφάλια το πλήθος των ζώων είναι 50.

Έστω ότι υπάρχουν x κότες. Τότε οι κατσίκες είναι $50 - x$

Οι x κότες έχουν $2x$ πόδια και οι $50 - x$ κατσίκες έχουν $4(50 - x)$ πόδια

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε $2x + 4(50 - x) = 120$

$$2x + 200 - 4x = 120$$

$$2x = 80$$

$$x = 40$$

Επομένως υπάρχουν 40 κότες και 10 κατσίκες

13.

Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την μικρότερη βάση. Αν το ύψος του τραπεζίου είναι 15 cm και το εμβαδόν του 210 cm^2 να βρεθούν οι βάσεις του τραπεζίου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x το μήκος της μικρής βάσης β , τότε η μεγάλη βάση B είναι $x + 4$

Ο τύπος $E = \frac{(B + \beta)u}{2}$ που μας δίνει το εμβαδόν του τραπεζίου κατά το πρόβλημα

$$\text{γίνεται } 210 = \frac{(x + 4 + x)15}{2} \quad \text{άρα } 2 \cdot 210 = 2 \cdot \frac{(x + 4 + x)15}{2}$$

$$420 = (2x + 4)15$$

$$420 = 30x + 60$$

$$360 = 30x$$

$$x = 12$$

Επομένως η μικρή βάση είναι 12 cm και η μεγάλη $12 + 4 = 16 \text{ cm}$

14.

Σ' ένα τρίγωνο η γωνία \hat{A} είναι 5° μεγαλύτερη της \hat{B} , και η \hat{B} είναι τριπλάσια της $\hat{\Gamma}$. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι $\hat{\Gamma} = x$ μοίρες. Τότε $\hat{B} = 3x$ και $\hat{A} = 3x + 5$
 Όμως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°
 Άρα $x + 3x + 3x + 5 = 180$
 $7x = 175$
 $x = 25$

Επομένως $\hat{\Gamma} = 25^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ και $\hat{A} = 80^\circ$

15.

Τρεις διαδοχικοί άρτιοι φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 42. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι x είναι ο μικρότερος αριθμός τότε η τριάδα αυτών σε αύξουσα σειρά είναι x , $x + 2$, $x + 4$ και σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε $x + x + 2 + x + 4 = 42$
 $3x = 36$
 $x = 12$

Επομένως οι αριθμοί είναι οι 12, 14, 16.