

2.5 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Γινόμενο κλασμάτων : Είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

2.

Γινόμενο φυσικού με κλάσμα : Είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του φυσικού με τον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο.

3.

Αντίστροφα κλάσματα : Είναι τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1

4.

Ιδιότητες : Στα κλάσματα ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών.

$$\text{αντιμεταθετική} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{προσεταιριστική} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda} \right)$$

$$\text{επιμεριστική} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\kappa}{\lambda} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\kappa}{\lambda} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda}$$

$$\text{ουδέτερο στοιχείο το 1} \quad 1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}$$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Υπενθύμιση : Η προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις με κλάσματα είναι ίδια με την προτεραιότητα των πράξεων στους φυσικούς αριθμούς

2.

Πρόταση : Για να βρούμε ένα κλάσμα ενός φυσικού αριθμού πολλαπλασιάζουμε το κλάσμα με το φυσικό αριθμό .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά

α) $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\dots}{\dots}$

β) Δύο κλάσματα με γινόμενο το 1 ονομάζονται

γ) Ο αριθμός $\frac{3}{5}$ είναι ... του $\frac{5}{3}$

δ) Η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό για τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ εκφράζεται από την ισότητα

ε) Η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό για τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\kappa}{\lambda}$ εκφράζεται από την ισότητα

Προτεινόμενη λύση

α) $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

β) Δύο κλάσματα με γινόμενο το 1 ονομάζονται **αντίστροφα**

γ) Ο αριθμός $\frac{3}{5}$ είναι **αντίστροφος** του $\frac{5}{3}$

δ) Η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό για τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ εκφράζεται από την ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$

ε) Η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό για τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\kappa}{\lambda}$ εκφράζεται από την ισότητα $\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda}\right)$

2.

Χαρακτηρίστε με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις

α) $\frac{\alpha \cdot \kappa}{\beta \cdot \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\kappa}{\beta}$ Σ

β) $\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \kappa}{\beta \cdot \delta \cdot \lambda}$ Σ

γ) $2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ Λ

δ) Ο πολλαπλασιασμός στα κλάσματα είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση Σ

ε) $0 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ Λ

Προτεινόμενη λύση

- α) $\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\kappa}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \kappa}{\lambda \cdot \beta} = \frac{\alpha \cdot \kappa}{\beta \cdot \lambda}$ Άρα η πρόταση είναι σωστή
- β) $\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \kappa}{\beta \cdot \delta \cdot \lambda}$ Άρα η πρόταση είναι σωστή
- γ) $2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{2}$ Άρα η πρόταση είναι λάθος
- δ) Ναι από την θεωρία. Άρα η πρόταση είναι σωστή
- ε) $0 \cdot \frac{3}{2} = 0$ Άρα η πρόταση είναι λάθος

3.

Να βρείτε τον αντίστροφο των αριθμών κ , $\frac{1}{\kappa}$ και $\frac{\lambda}{\kappa}$

Απάντηση

Οι αντίστροφοι αντίστοιχα είναι $\frac{1}{\kappa}$, κ και $\frac{\kappa}{\lambda}$

4.

Υπάρχει αριθμός ίσος με τον αντίστροφό του;

Απάντηση

Ναι είναι η μονάδα, αφού $1 \cdot 1 = 1$

5.

Αν $x \cdot y = \frac{4}{5}$ και $z = \frac{11}{9}$, να υπολογίσετε το γινόμενο $x \cdot (y \cdot z)$

Προτεινόμενη λύση

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = \frac{4}{5} \cdot \frac{11}{9} = \frac{44}{45}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

6.

Υπολογίστε τα γινόμενα α) $2 \cdot \frac{7}{9}$ β) $\frac{7}{5} \cdot 15$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) 2 \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{9} \quad \beta) \frac{7}{5} \cdot 15 = \frac{105}{5} = 21$$

7.

Υπολογίστε τα γινόμενα απλοποιώντας κατάλληλα πριν την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού

α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}$

β) $\frac{7}{2} \cdot \frac{8}{13}$

γ) $\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5}$

δ) $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9}$

ε) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{11}$

στ) $\frac{22}{30} \cdot \frac{4}{5}$

Προτεινόμενη λύση

α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot \cancel{4}^1}{\cancel{4}^1 \cdot 7} = \frac{3}{7}$

β) $\frac{7}{2} \cdot \frac{8}{13} = \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 13} = \frac{7 \cdot \cancel{8}^4}{\cancel{2}^1 \cdot 13} = \frac{28}{13}$

γ) $\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{10 \cdot 5} = \frac{7 \cdot \cancel{2}^2}{\cancel{10}^2 \cdot 5} = \frac{14}{25}$

δ) $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{10}^1}{\cancel{10}^1 \cdot 9} = \frac{1}{3}$

ε) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{11} = \frac{3 \cdot 15}{5 \cdot 11} = \frac{3 \cdot \cancel{15}^3}{\cancel{5}^1 \cdot 11} = \frac{9}{11}$

στ) $\frac{22}{30} \cdot \frac{4}{5} = \frac{22 \cdot 4}{30 \cdot 5} = \frac{22 \cdot \cancel{2}^1}{\cancel{30}^2 \cdot 5} = \frac{44}{75}$

8.

Υπολογίστε τις δυνάμεις

α) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

β) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$

γ) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$

δ) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$

Προτεινόμενη λύση

α) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

β) $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

γ) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$

δ) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$

9.

Αντιστοιχίστε σε κάθε γινόμενο της 1^{ης} σειράς το αποτέλεσμα του της 2^{ης} σειράς

α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$	β) $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}$	γ) $\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{20}$	δ) $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$	ε) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10}$
1. $\frac{1}{5}$	2. $\frac{1}{15}$	3. $\frac{8}{15}$	4. $\frac{1}{4}$	5. $\frac{1}{40}$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \quad \text{Άρα } \alpha \rightarrow 3$$

$$\beta) \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{40} \quad \text{Άρα } \beta \rightarrow 5$$

$$\gamma) \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{20} = \frac{2 \cdot 14}{7 \cdot 20} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{14} 2}{\cancel{7} 1 \cdot \cancel{20} 10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{Άρα } \gamma \rightarrow 1$$

$$\delta) \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{\cancel{3} 1 \cdot \cancel{2} 1}{\cancel{10} 5 \cdot \cancel{9} 3} = \frac{1}{15} \quad \text{Άρα } \delta \rightarrow 2$$

$$\epsilon) \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 10} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} 1}{\cancel{8} 2 \cdot \cancel{10} 2} = \frac{1}{4} \quad \text{Άρα } \epsilon \rightarrow 4$$

10.

Να βρείτε τους αντιστρώφους των αριθμών 3 , $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, $5\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} + \frac{2}{9}$

Προτεινόμενη λύση

$$3 \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} \rightarrow 5, \quad \frac{2}{7} \rightarrow \frac{7}{2},$$

$$5\frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \rightarrow \frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{7}{18} \rightarrow \frac{18}{7}$$

11.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \right) \qquad \beta) 3^2 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{2}{18} = \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{21}{189} = \\ &= \frac{5}{12} + \frac{2}{9} = \frac{5}{36} + \frac{8}{36} = \frac{23}{36} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} &= 9 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2 + \frac{1}{8} \right) - \frac{9}{8} = \\ &= 9 \cdot \left(\frac{6}{8} + \frac{16}{8} + \frac{1}{8} \right) - \frac{9}{8} = \\ &= 9 \cdot \frac{23}{8} - \frac{9}{8} = \\ &= \frac{207}{8} - \frac{9}{8} = \frac{198}{8} = \frac{99}{4} \end{aligned}$$

12.

Να βρείτε πόσα γραμμάρια είναι

$$\alpha) \text{ τα } \frac{3}{4} \text{ του ενός κιλού,} \quad \beta) \text{ τα } \frac{4}{5} \text{ των δύο κιλών,} \quad \gamma) \text{ τα } \frac{9}{10} \text{ των 5 κιλών}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) \frac{3}{4} \cdot 1000 = 750 \text{ γραμμάρια}$$

$$\beta) \frac{4}{5} \cdot 2000 = 1600 \text{ γραμμάρια}$$

Σχόλιο 2

$$\gamma) \frac{9}{10} \cdot 5000 = 4500 \text{ γραμμάρια}$$

13.

Το ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου χωράει 45 λίτρα βενζίνη και το κάθε λίτρο βενζίνης κοστίζει $1\frac{2}{3}$ €. Να βρείτε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε, αν

α) Γεμίσουμε το $\frac{1}{3}$ του ρεζερβουάρ

β) Τα $\frac{2}{5}$ του ρεζερβουάρ

Προτεινόμενη λύση

α)

Η βενζίνη που αγοράσαμε είναι $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$ λίτρα.

Το ένα λίτρο κοστίζει $1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ €

Θα πληρώσουμε $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$ €

β)

Ομοίως $\frac{2}{5} \cdot 45 = 18$ λίτρα, θα πληρώσουμε $18 \cdot \frac{5}{3} = 30$ €

14.

Από τους 150 μαθητές ενός σχολείου, το $\frac{1}{3}$ πηγαίνει στο σχολείο με το σχολικό, τα $\frac{3}{5}$ με τα πόδια και οι υπόλοιποι με ποδήλατο.

α) Να βρείτε πόσοι μαθητές πηγαίνουν στο σχολείο με το κάθε μέσο.

β) Ποιο μέρος των μαθητών πηγαίνει στο σχολείο με ποδήλατο;

Προτεινόμενη λύση

α)

$\frac{1}{3} \cdot 150 = 50$ μαθητές πηγαίνουν με το σχολικό

$\frac{3}{5} \cdot 150 = 90$ μαθητές πηγαίνουν με τα πόδια

Οι υπόλοιποι 10 πηγαίνουν με ποδήλατο

β)

Με ποδήλατο πηγαίνει το $\frac{10}{150}$ των μαθητών = $\frac{1}{15}$ των μαθητών