

5.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΣΟΣΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δύο υπάλληλοι έχουν μηνιαίο μισθό 1500 €. Στον έναν από τους δύο έγινε αύξηση 8% και στον άλλο μείωση 5% πάνω στις αποδοχές του πρώτου υπαλλήλου όπως αυτές διαμορφώθηκαν μετά την αύξηση. Να βρείτε τους νέους μισθούς .

Προτεινόμενη λύση

Η αύξηση που έγινε στον έναν υπάλληλο είναι ίση με $\frac{8}{100} \cdot 1500 = 120$ €

και ο μισθός του διαμορφώθηκε στα 1620 €.

Η μείωση που έγινε στον άλλο υπάλληλο είναι $\frac{5}{100} \cdot 1620 = 81$ €

και ο μισθός του έγινε $1500 - 81 = 1419$ €

2.

Ένας υπολογιστής το 2010 κόστιζε 1200 €. Το 2011 έγινε μείωση στην τιμή κατά 25% και το 2012 νέα μείωση 20% πάνω στην τιμή του 2011.

α) Να βρείτε ποια ήταν η τιμή το 2012.

β) Η συνολική μείωση της τιμής είναι το άθροισμα των διαδοχικών μειώσεων δηλαδή 45% πάνω στην αρχική τιμή ;

Προτεινόμενη λύση

α)

Η πρώτη μείωση της τιμής είναι $\frac{25}{100} \cdot 1200 = 300$ € .

Έτσι η τιμή το 2011 έγινε $1200 - 300 = 900$ €

Η δεύτερη μείωση είναι $\frac{20}{100} \cdot 900 = 180$ €

και η τιμή το 2012 έγινε $900 - 180 = 720$ €

β)

Μετά από τις δύο μειώσεις η τιμή του υπολογιστή έπεσε κατά $300 + 180 = 480$ €

Αν γινόταν μείωση στην αρχική τιμή κατά 45% αυτή θα ήταν

$\frac{45}{100} \cdot 1200 = 540$ € .

Είναι φανερό ότι η συνολική μείωση είναι διαφορετική από την μείωση της αρχικής τιμής κατά 45%

3.

Η πλευρά ενός τετραγώνου αυξάνεται κατά 15% . Να βρείτε το ποσοστό αύξησης

α) της περιμέτρου του τετραγώνου

β) του εμβαδού του τετραγώνου

Προτεινόμενη λύση

Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με a , τότε η περίμετρος είναι $\Pi = 4a$

και το εμβαδόν $E = a^2$.

$$\begin{aligned} \text{Μετά την αύξηση κατά } 15\% , \text{ η πλευρά έγινε } a + \frac{15}{100} \cdot a &= a + 0,15a = \\ &= a(1 + 0,15) = \\ &= 1,15a. \end{aligned}$$

α)

Η νέα περίμετρος είναι $\Pi' = 4 \cdot (1,15a) = 4,6a$ επομένως η περίμετρος αυξήθηκε κατά $4,6a - 4a = 0,6a$.

Αυτή η αύξηση είναι τα $\frac{0,6a}{4a}$ της περιμέτρου του τετραγώνου

$$\text{Όμως } \frac{0,6a}{4a} = 0,15 = \frac{15}{100} = 15\% .$$

Άρα η περίμετρος αυξήθηκε κατά 15%

β)

Το νέο εμβαδόν είναι $E' = (1,15a)^2 = 1,3225a^2$

Το εμβαδόν αυξήθηκε κατά $1,3225a^2 - a^2 = 0,3225a^2$

Αυτή η αύξηση είναι τα $\frac{0,3225a^2}{a^2}$ του εμβαδού .

$$\text{Όμως } \frac{0,3225a^2}{a^2} = 0,3225 = \frac{32,25}{100} = 32,25\%$$

Επομένως το εμβαδόν αυξήθηκε κατά 32,25%

4.

Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 15% και μετά από μία βδομάδα μειώθηκε 15% . Πότε συνέφερε να το αγοράσουμε πριν τις μεταβολές ή μετά τη δεύτερη μεταβολή ;

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η αρχική τιμή του προϊόντος

$$\text{Μετά την αύξηση, η τιμή του προϊόντος έγινε } x + \frac{15}{100} \cdot x = x + 0,15x = 1,15x$$

Μετά τη μείωση, η τιμή του προϊόντος έγινε

$$\begin{aligned} 1,15x - \frac{15}{100} \cdot 1,15x &= 1,15x - 0,15 \cdot 1,15x \\ &= 1,15x - 0,1725x \\ &= 0,9775x \end{aligned}$$

Επειδή $0,9775x < x$, είναι φανερό ότι μας συμφέρει να αγοράσουμε το προϊόν μετά τις μεταβολές .

5.

Σε 8 μήνες πήραμε τόκο 1200 € από ένα κεφάλαιο που το καταθέσαμε με επιτόκιο 8% ετησίως. Να βρείτε πόσον τόκο θα πάρουμε από το διπλάσιο κεφάλαιο με το ίδιο επιτόκιο σε έναν χρόνο.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι x € .

Τότε ο τόκος για ένα έτος είναι $\frac{8}{100} \cdot x$

Επειδή το κεφάλαιο έμεινε στην τράπεζα μόνο 8 μήνες, ο τόκος που πήραμε είναι τα $\frac{8}{12}$ του ετήσιου τόκου, δηλαδή τα $\frac{8}{12}$ του $\frac{8}{100} \cdot x$.

Τότε σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{100} \cdot x &= 1200 \\ \frac{64}{1200} \cdot x &= 1200 \\ x &= 1200 : \frac{64}{1200} = \\ &= 1200 \cdot \frac{1200}{64} = 22500 \end{aligned}$$

Το διπλάσιο του παραπάνω κεφαλαίου είναι 45000 και ο τόκος που θα αποφέρει σε ένα έτος είναι $\frac{8}{100} \cdot 45000 = 3600$ €

6.

Αν αγοράσουμε ένα στερεοφωνικό αξίας 300 € «τοις μετρητοίς» θα έχουμε έκπτωση 12% , ενώ αν το αγοράσουμε με δόσεις θα δώσουμε προκαταβολή 80 € και στο υπόλοιπο θα έχουμε προσαύξηση 8%. Να βρείτε πόσο θα αγοράσουμε το στερεοφωνικό «τοις μετρητοίς» και πόσο με δόσεις .

Προτεινόμενη λύση

Η αξία του στερεοφωνικού μετρητοίς είναι $300 - \frac{12}{100} \cdot 300 = 300 - 36 = 264$ €

Η αξία του στερεοφωνικού με δόσεις προσδιορίζεται ως εξής
Προκαταβολή 80 €, υπόλοιπο $300 - 80 = 220$ €

Επιβάρυνση στο υπόλοιπο λόγω της προσαύξησης $\frac{8}{100} \cdot 220 = 17,6$ €

Συνολικό κόστος αγοράς με δόσεις $80 + 220 + 17,6 = 317,6$ €

7.

Όταν αλέθουμε σιτάρι παίρνουμε 15% του βάρους του πίτουρα, 8% σιμιγδάλι και το υπόλοιπο αλεύρι. Αλέσαμε μια ποσότητα σταριού και πήραμε 4620 kg αλεύρι.

α) Να βρείτε πόσο σιτάρι αλέσαμε

β) Πόσο σιμιγδάλι πήραμε

Προτεινόμενη λύση

Το ποσοστό του σταριού που γίνεται αλεύρι είναι $100 - (15 + 8) = 100 - 23 = 77\%$

α)

Αν x είναι η ποσότητα του σταριού που αλέσαμε, τότε

$$\frac{77}{100} \cdot x = 4620 \quad \text{άρα} \quad x = 4620 : \frac{77}{100} = 4620 \cdot \frac{100}{77} = 6000 \text{ kg}$$

β)

$$\text{Το σιμιγδάλι που πήραμε είναι} \quad \frac{8}{100} \cdot 6000 = 480 \text{ kg}$$

8.

Ένας manάβης αγόρασε 120 kg μήλα και πλήρωσε 96€. Το 75% από τα μήλα τα πούλησε με κέρδος 18%, ενώ τα υπόλοιπα τα πούλησε 70 λεπτά το κιλό.

Να βρείτε αν κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο.

Προτεινόμενη λύση

Το κόστος του κιλού των μήλων είναι $96 : 120 = 0,8\text{€} = 80 \text{ λεπτά}$

Το 75% των μήλων είναι $\frac{75}{100} \cdot 120 = 90 \text{ kg}$. Αυτή η ποσότητα των μήλων στοίχισε στον manάβη $90 \cdot 0,8 = 72 \text{ €}$.

Επειδή την ποσότητα αυτή την πούλησε με κέρδος 18%, κέρδισε $\frac{18}{100} \cdot 72 = 12,96 \text{ €}$.

Τα υπόλοιπα μήλα δηλαδή τα $120 - 90 = 30$ κιλά τα πούλησε 70 λεπτά το κιλό, δηλαδή με ζημιά 10 λεπτά το κιλό.

Επομένως η ζημιά του ήταν $30 \cdot 10 = 300 \text{ λεπτά} = 3\text{€}$

Τελικά ο manάβης κέρδισε $12,96 - 3 = 9,96 \text{ €}$

9.

Ένας έμπορος αγόρασε 80 κιλά σαπούνι με 0,90 € το κιλό. Το σαπούνι, όταν στέγνωσε, έχασε το 20% του βάρους του. Να βρείτε πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό το σαπούνι για να κερδίσει 14% πάνω στην τιμή κόστους.

Προτεινόμενη λύση

Το κόστος των 80 κιλών του σαπουνιού ήταν $80 \cdot 0,90 = 72 \text{ €}$

Η απώλεια στο βάρος του σαπουνιού ήταν $\frac{20}{100} \cdot 80 = 16 \text{ kg}$

Επομένως πουλώντας τα $80 - 16 = 64 \text{ kg}$ σαπούνι που έμειναν σύμφωνα με το πρόβλημα, θα πρέπει να έχει κέρδος 14% πάνω στην τιμή κόστους δηλαδή στα 72€

Το κέρδος είναι $\frac{14}{100} \cdot 72 = 10,08\text{€}$

Τα χρήματα που θα εισπράξει συνολικά ο έμπορος από την πώληση των 64 κιλών είναι ίσα με το κόστος του σαπουνιού συν το κέρδος του, δηλαδή $72 + 10,08 = 82,08 \text{ €}$

Οπότε ο έμπορος πρέπει να πουλήσει το κιλό το σαπούνι προς $82,08 : 64 = 1,2825$ €

10.

Μία μοτοσυκλέτα αγοράστηκε, μαζί με τον ΦΠΑ που είναι 23%, προς 7380 €. Να βρεθεί η τιμή της μοτοσυκλέτας χωρίς ΦΠΑ και ο ΦΠΑ που πληρώσαμε.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η αξία της μοτοσυκλέτας χωρίς ΦΠΑ, τότε το ποσό του ΦΠΑ σε αυτή την τιμή είναι $\frac{23}{100} \cdot x = 0,23x$ €.

Οπότε σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε $x + 0,23x = 7380$ άρα

$$1,23x = 7380$$

$$x = 7380 : 1,23 = 6000$$

Επομένως η τιμή της μοτοσυκλέτας χωρίς ΦΠΑ ήταν 6000 € και ο ΦΠΑ που πληρώσαμε $7380 - 6000 = 1380$ €

11.

Αγοράσαμε είδη αξίας 42,5 € και 380 € και πληρώσαμε μαζί με τον ΦΠΑ αντίστοιχα 49,3 € και 402,8 €. Να βρείτε τον συντελεστή ΦΠΑ για κάθε είδος

Προτεινόμενη λύση

Για το πρώτο είδος η επιβάρυνση λόγω του ΦΠΑ είναι $49,3 - 42,5 = 6,8$ €

Αυτό το ποσό είναι τα $\frac{6,8}{42,5}$ της αξίας του πρώτου είδους.

$$\text{Όμως } \frac{6,8}{42,5} = 0,16 = \frac{16}{100} = 16\%$$

Επομένως ο συντελεστής ΦΠΑ για το πρώτο είδος είναι 16%

Για το δεύτερο είδος θα δούμε μία διαφορετική λύση

Αν $x\% = \frac{x}{100}$ είναι ο συντελεστής ΦΠΑ, τότε η επιβάρυνση λόγω του ΦΠΑ είναι

$$\frac{x}{100} \cdot 380 = 3,8x. \text{ Επομένως τα } 402,8 \text{ € είναι ίσα με } 380 + 3,8x \text{ €}$$

$$\text{Άρα έχουμε την εξίσωση } 380 + 3,8x = 402,8$$

$$3,8x = 402,8 - 380$$

$$3,8x = 22,8$$

$$x = 22,8 : 3,8 = 6$$

Δηλαδή ο συντελεστής ΦΠΑ για το δεύτερο είδος είναι 6%

12.

Ένα laptop κοστίζει 230 € και το αγοράσαμε με έκπτωση 12%. Αν στην τιμή αγοράς πληρώσαμε επιπλέον για ΦΠΑ 23%, να βρείτε πόσο μας κόστισε το laptop.

Προτεινόμενη λύση

Η έκπτωση που μας έγινε ήταν $\frac{12}{100} \cdot 230 = 27,6$ €.

Συνεπώς η τιμή αγοράς ήταν $230 - 27,6 = 202,4$ €.

Ο ΦΠΑ που πληρώσαμε σε αυτή την τιμή είναι $\frac{23}{100} \cdot 202,4 = 46,552$ €

Οπότε το laptop μας κόστισε $202,4 + 46,552 = 248,952$ €

13.

Ο Κώστας αγόρασε ένα ποδήλατο αξίας 160 €. Έδωσε το 25% προκαταβολή και το υπόλοιπο ποσό το εξόφλησε σε τέσσερις ισόποσες μηνιαίες δόσεις με επιβάρυνση για την κάθε δόση 2% το μήνα. Να βρείτε

- α) Το ποσό της κάθε δόσης χωρίς την επιβάρυνση
- β) Το ποσό της κάθε δόσης με την επιβάρυνση
- γ) Το τελικό συνολικό κόστος του ποδήλατου

Προτεινόμενη λύση

α)

Η προκαταβολή είναι $\frac{25}{100} \cdot 160 = 40$ €.

Το υπόλοιπο είναι $160 - 40 = 120$ €

Το ποσό της κάθε δόσης χωρίς την επιβάρυνση είναι $120 : 4 = 30$ €

β)

Η 1^η δόση έχει επιβάρυνση $\frac{2}{100} \cdot 30 = 0,6$ €

Επομένως το ποσό της 1^{ης} δόσης με την επιβάρυνση είναι $30 + 0,6 = 30,6$ €

Η 2^η δόση, επειδή καθυστερεί δύο μήνες, έχει επιβάρυνση $2 \cdot 0,6 = 1,2$ €

και το ποσό αυτής είναι $30 + 1,2 = 31,2$ € .

Ομοίως βρίσκουμε ότι η 3^η δόση είναι $30 + 3 \cdot 0,6 = 31,8$ €

και η 4^η $30 + 4 \cdot 0,6 = 32,4$ €

γ)

Το συνολικό κόστος του ποδήλατου είναι $40 + 30,6 + 31,2 + 31,8 + 32,4 = 166$ €

14.

Ένας έμπορος αγόρασε δύο φορέματα και πλήρωσε συνολικά 260 €. Μετά πούλησε τα φορέματα το ένα με κέρδος 25% και το δεύτερο με κέρδος 20%. Έτσι κέρδισε συνολικά 59 €. Να βρείτε την αξία του κάθε φορέματος.

Προτεινόμενη λύση

Αν το ένα φόρεμα που πούλησε με κέρδος 25% άξιζε x €, τότε το άλλο άξιζε $260 - x$ €

Το κέρδος από το πρώτο φόρεμα είναι $\frac{25}{100}x = 0,25x$

Το κέρδος από το δεύτερο είναι $\frac{20}{100} \cdot (260 - x) = 0,2(260 - x) = 52 - 0,2x$

Αφού το συνολικό κέρδος ήταν 59 €, έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} 0,25x + 52 - 0,2x &= 59 \\ 0,05x + 52 &= 59 \\ 0,05x &= 59 - 52 \\ 0,05x &= 7 \\ x &= 7 : 0,05 = 140 \end{aligned}$$

Συνεπώς το ένα φόρεμα το αγόρασε 140 € και το άλλο $260 - 140 = 120$ €

15.

Κατέθεσε κάποιος σε μία τράπεζα 5000€. Ένα μέρος εξ αυτών με επιτόκιο 2% και το υπόλοιπο με επιτόκιο 1,6 % για ένα έτος και πήρε συνολικά τόκους 92 €. Να βρείτε ποιο ποσό είχε επιτόκιο 2% και ποιο 1,6%

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι x ήταν το ποσό που κατατέθηκε με επιτόκιο 2%

Τότε το υπόλοιπο ήταν $5000 - x$ και κατατέθηκε με επιτόκιο 1,6 %

Από το πρώτο ποσό ο τόκος ήταν $\frac{2}{100} \cdot x = 0,02x$

Από το δεύτερο ποσό ο τόκος ήταν $\frac{1,6}{100} \cdot (5000 - x) = 0,016 \cdot (5000 - x) =$
 $= 80 - 0,016x$

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} 0,02x + 80 - 0,016x &= 92 \\ 0,004x + 80 &= 92 \\ 0,004x &= 92 - 80 \\ 0,004x &= 12 \\ x &= 12 : 0,004 = 3000 \end{aligned}$$

Δηλαδή με επιτόκιο 2% κατατέθηκαν 3000 € και με 1,6% τα υπόλοιπα 2000€