

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΩΡΙΑ

1^ο Θέμα

- α) Ποια παράσταση ονομάζουμε αριθμητική και ποια αλγεβρική ;
β) Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρώσετε τα κενά

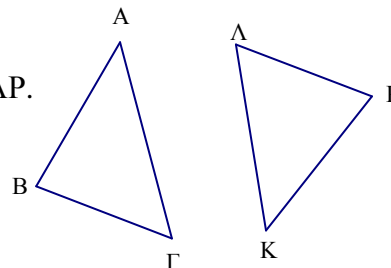
| | Πρόσθεση | Πολλαπλασιασμός |
|--------------------------|----------|-----------------|
| Αντιμεταθετική ιδιότητα | | |
| Προσεταιριστική ιδιότητα | | |
| Ουδέτερο στοιχείο | | |
| Επιμεριστική ιδιότητα | | |

- γ) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες
- Ο αριθμός $-x$ είναι αρνητικός
 - Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο ομόσημο με αυτούς
 - Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός
 - Οι ετερόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό
 - $a - b = b - a$ για οποιεσδήποτε τιμές των a και b
 - Αν $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0$ και $b = 0$
 - Αν $a^2 + b^2 = 0$ τότε $a = 0$ και $b = 0$
 - Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν γινόμενο 0
 - Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1
 - Αν a και $b \neq 0$ τότε $a : b = b : a$

2^ο Θέμα

- α) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά
- Ονομάζουμε διάμεσο ενός τριγώνου το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία του τριγώνου με το της απέναντι πλευράς
 - Αμβλυγώνιο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει
 - Ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο όταν έχει
 - Οξυγώνιο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει
 - Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονταιγωνίες
 - Σκαληνό ονομάζεται το τρίγωνο που οι πλευρές του είναι
 - Το τρίγωνο με δύο μόνο πλευρές ίσες το λέμε
 - Ισόπλευρο λέμε το τρίγωνο που οι πλευρές του είναι

- β) Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΡ είναι ίσα και ισχύει $AB = KP$, $ΑΓ = ΚΛ$ και $ΒΓ = ΛΡ$.
Να γράψετε τις ισότητες που προκύπτουν για τις γωνίες των τριγώνων



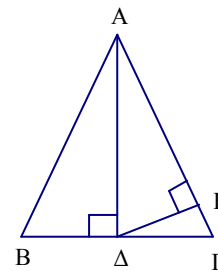
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1^η Άσκηση

Το διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ και ύψος ΑΔ. Φέρουμε το τμήμα ΔΕ ⊥ ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι

- α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομολόγων πλευρών τους
 β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομολόγων πλευρών τους



2^η Άσκηση

- α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 6x - 4y = 2x - y - 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

 β) Αν $x = a$ και $y = \beta$ είναι η λύση του συστήματος, να βρείτε το z , έτσι ώστε να ισχύει $az^2 - \beta z = 2$

3^η Άσκηση

- α) Να αναλύσετε τις παραστάσεις $x^2 + 3x + 2$ και $2x + 4$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
 β) Να βρείτε το ΕΚΠ των παραστάσεων $x^2 + 3x + 2$ και $2x + 4$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση
$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{x + 1}{2x + 4} = \frac{1}{x + 1}$$

(ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ)

1^ο Θέμα (απάντηση)

α)

Αριθμητική ονομάζουμε κάθε παράσταση που περιέχει αριθμούς, οι οποίοι συνδέονται με τα γνωστά σύμβολα των πράξεων

Αλγεβρική ονομάζουμε την παράσταση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές που συνδέονται με τα γνωστά σύμβολα των πράξεων

β)

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παρακάτω

| | Πρόσθεση | Πολλαπλασιασμός |
|--------------------------|---|---|
| Αντιμεταθετική ιδιότητα | $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ | $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ |
| Προσεταιριστική ιδιότητα | $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ | $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ |
| Ουδέτερο στοιχείο | $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ | $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ |
| Επιμεριστική ιδιότητα | $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ | |

γ)

Με βάση την θεωρία έχουμε ότι

- i) Δ (είναι ο αντίθετος του x)
 ii) Δ
 iii) Σ

- iv) Σ
- v) Λ
- vi) Λ ($\alpha = 0$ ή $\beta = 0$)
- vii) Σ
- viii) Λ (άθροισμα 0)
- ix) Σ
- x) Λ

2^ο Θέμα (απάντηση)

α)

Με βάση την θεωρία έχουμε τα παρακάτω

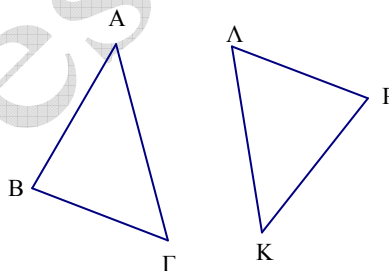
- i) Ονομάζουμε διάμεσο ενός τριγώνου το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία **κορυφή** του τριγώνου με το **μέσο** της απέναντι πλευράς
- ii) Αμβλυγώνιο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει μία **αμβλεία γωνία**
- iii) Ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο όταν έχει **μία ορθή γωνία**
- iv) Οξυγώνιο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει **όλες τις γωνίες οξείες**
- v) Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται **ίσες γωνίες**
- vi) Σκαληνό ονομάζεται το τρίγωνο που οι πλευρές του είναι **άνισες**
- vii) Το τρίγωνο με δύο μόνο πλευρές ίσες το λέμε **ισοσκελές**
- viii) Ισόπλευρο λέμε το τρίγωνο που οι πλευρές του είναι **ίσες**

β)

Αφού στα ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές

βρίσκονται ίσες γωνίες έχουμε

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Lambda} \quad , \quad \widehat{B} = \widehat{P} \quad \text{και} \quad \widehat{A} = \widehat{K}$$



1^η Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

Στο ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος στη βάση είναι και διχοτόμος.

Οπότε στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουμε

$$\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{A}E} \quad \text{και} \quad \widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{\Delta\hat{E}A} = 90^\circ.$$

Επομένως αυτά είναι όμοια.

Επειδή οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες, η ισότητα των λόγων των ομολόγων πλευρών

$$\text{είναι} \quad \frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{A\Delta}{AE}$$

β)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\widehat{\Delta\hat{A}E} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ **(1)**

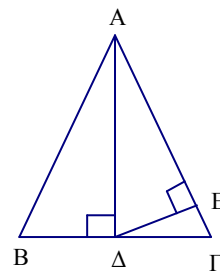
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ είναι $\widehat{E\hat{\Delta}\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ **(2)**

Τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα είναι και τα πρώτα

Οπότε $\widehat{\Delta\hat{A}E} + \widehat{\Gamma} = \widehat{E\hat{\Delta}\Gamma} + \widehat{\Gamma}$ συνεπώς $\widehat{\Delta\hat{A}E} = \widehat{E\hat{\Delta}\Gamma}$

Επειδή ακόμα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν και $\widehat{A\hat{E}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$, αυτά είναι όμοια

Η ισότητα των λόγων των ομολόγων πλευρών είναι $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{AE}{\Delta E}$



2^η Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

$$\begin{cases} 6x - 4y = 2x - y - 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} 6x - 4y - 2x + y = -1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \quad (\text{μέθοδος αντιθέτων συντελεστών})$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \quad (\cdot 5) \\ 5x - 2y = 4 \quad (\cdot -4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - 15y = -5 \\ -20x + 8y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7y = -21 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3 \\ 5x - 2 \cdot 3 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

β)

Για $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ έχουμε $2z^2 - 3z = 2$

$$2z^2 - 3z - 2 = 0$$

$$\text{με } \Delta = 25 \text{ και ρίζες } z_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3 + 5}{4} = 2 \text{ και } z_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{4} = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$$

3^η Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

Οι ρίζες του τριώνυμου $x^2 + 3x + 2$ είναι $x_1 = -1$ και $x_2 = -2$

$$\text{Οπότε } x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

$$2x + 4 = 2(x + 2)$$

β)

$$\text{ΕΚΠ } (x^2 + 3x + 2, 2x + 4) = 2(x + 1)(x + 2)$$

γ)

$$\text{Η εξίσωση γράφεται } \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{2(x+2)} = \frac{1}{x+1} \text{ με}$$

$$\text{ΕΚΠ } [(x+1)(x+2), 2(x+2), x+1] = 2(x+1)(x+2)$$

Πρέπει να ισχύει $2(x+1)(x+2) \neq 0$ άρα $x \neq -1$ και $x \neq -2$. Τότε

$$2(x+1)(x+2) \frac{1}{(x+1)(x+2)} - 2(x+1)(x+2) \frac{x+1}{2(x+2)} = 2(x+1)(x+2) \frac{1}{x+1}$$

$$2 - (x+1)^2 = 2(x+2)$$

$$2 - (x^2 + 2x + 1) = 2x + 4$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ με } \Delta = 4 \text{ και ρίζες } x_1 = -1 \text{ και } x_2 = -3$$

Από αυτές η $x_1 = -1$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.