

## 1.4 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ – ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

### ΘΕΩΡΙΑ

1.

**Ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης :** Αν  $\Delta$ ,  $\delta$  φυσικοί αριθμοί με  $\delta \neq 0$ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί  $\pi$  και  $\upsilon$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \quad \text{όπου } \upsilon < \delta$$

Η διαίρεση του  $\Delta$  με τον  $\delta$  συμβολίζεται με  $\Delta : \delta$

2.

**Ονομασίες :** Στην ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, ο  $\Delta$  ονομάζεται διαιρετέος, ο  $\delta$  διαιρέτης, ο  $\pi$  πηλίκο και ο  $\upsilon$  υπόλοιπο

3.

**Τέλεια διαίρεση :** Είναι η διαίρεση στην οποία το υπόλοιπο είναι 0.

4.

**Ειδικές περιπτώσεις :** Αν  $\Delta = \delta$ , δηλαδή ο διαιρετέος είναι ίσος με τον διαιρέτη, τότε το πηλίκο  $\pi$  της διαίρεσης είναι ίσο με το 1.

Αν  $\delta = 1$  δηλαδή ο διαιρετέος είναι ίσος με τη μονάδα, τότε το πηλίκο  $\pi$  της διαίρεσης είναι ίσο με τον διαιρετέο  $\Delta$ .

Αν  $\Delta = 0$ , τότε το πηλίκο  $\pi$  της διαίρεσης είναι 0.

Συντομότερα  $a : a = 1$ ,  $a : 1 = a$ ,  $0 : a = 0$

## ΣΧΟΛΙΑ

1.

**Δοκιμή διαίρεσης :** Βασίζεται στην ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Για να είναι σωστά εκτελεσμένη μία διαίρεση θα πρέπει : πολλαπλασιάζοντας τον διαιρέτη επί το πηλίκο και προσθέτοντας το υπόλοιπο να βρίσκουμε τον διαιρετέο

2.

**Παράγοντας :** Όταν η διαίρεση είναι τέλεια η ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι η  $\Delta = \delta \cdot \pi$  σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα  $\delta$  και  $\pi$  είναι παράγοντες του  $\Delta$

3.

**Άρτιοι – περιττοί :** Η ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης φυσικού αριθμού  $a$  με το 2 είναι  $a = 2\pi + \nu$  με  $\nu = 0$  ή  $\nu = 1$

- Όταν  $\nu = 0$ , τότε  $a = 2\pi$ . Τότε λέμε ότι ο  $a$  είναι άρτιος
- Όταν  $\nu = 1$ , τότε  $a = 2\pi + 1$ . Τότε λέμε ότι ο  $a$  είναι περιττός.

Στο εξής λοιπόν, τον τυχαίο άρτιο θα συμβολίζουμε με  $2\pi$  και τον τυχαίο περιττό με  $2\pi + 1$ , όπου  $\pi$  φυσικός αριθμός

4.

**Έλεγχος :** Μια σχέση της μορφής  $a = \beta \cdot \pi + \nu$  (1), για να είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης, θα πρέπει το  $\nu$  να είναι μικρότερο από έναν τουλάχιστον εκ των  $\beta$  και  $\pi$ .

Ειδικότερα :

- Αν το  $\nu$  είναι μικρότερο και του  $\beta$  και του  $\pi$ , τότε η (1) είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης, και με διαιρέτη το  $\beta$  και με διαιρέτη το  $\pi$ .
- Αν το  $\nu$  είναι μικρότερο μόνο του  $\beta$ , τότε η (1) είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης, με διαιρέτη το  $\beta$
- Αν το  $\nu$  είναι μικρότερο μόνο του  $\pi$ , τότε η (1) είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης, με διαιρέτη το  $\pi$

5.

**Προτεραιότητα :** Αν σε μία αριθμητική παράσταση υπάρχουν και διαιρέσεις, αυτές εκτελούνται μαζί με τους πολλαπλασιασμούς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.**

Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι ισότητες Ευκλείδειας διαίρεσης

**α)**  $127 = 33 \cdot 3 + 28$     **β)**  $762 = 38 \cdot 19 + 40$     **γ)**  $80 = 9 \cdot 8 + 8$     **δ)**  $60 = 8 \cdot 7 + 4$

**Προτεινόμενη λύση**

θεωρία 1

**α)**

Επειδή  $28 < 33$ , η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 33 και πηλίκο 3.

**β)**

Επειδή  $40 > 38$  και  $40 > 19$  η ισότητα αυτή δεν είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης

**γ)**

Επειδή  $8 < 9$  η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 9 και πηλίκο 8

**δ)**

Είναι σε κάθε περίπτωση

**2.**

Ποιοί αριθμοί διαιρούμενοι με το 6 δίνουν πηλίκο 8;

**Προτεινόμενη λύση**

θεωρία 1

Αν  $a$  είναι ένας από τους ζητούμενους αριθμούς τότε θα ισχύει

$$a = 6 \cdot 8 + v = 48 + v \quad \text{όπου } v = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- Για  $v = 0$ , τότε  $a = 48$ ,
- Για  $v = 1$ , τότε  $a = 49$
- Για  $v = 2$ , τότε  $a = 50$
- Για  $v = 3$ , τότε  $a = 51$
- Για  $v = 4$ , τότε  $a = 52$
- Για  $v = 5$ , τότε  $a = 53$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$a = 48 \quad \text{ή} \quad a = 49 \quad \text{ή} \quad a = 50 \quad \text{ή} \quad a = 51 \quad \text{ή} \quad a = 52 \quad \text{ή} \quad a = 53$$

**3.**

Να βρείτε έναν αριθμό στις παρακάτω περιπτώσεις

**α)** Όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει πηλίκο 14 και υπόλοιπο 5

**β)** Είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 215 με το 3.

**Προτεινόμενη λύση**

θεωρία 1  
σχόλιο 1

**α)**  $a = 7 \cdot 14 + 5 = 103$  ο ζητούμενος

**β)** Επειδή  $215 = 3 \cdot 71 + 2$ , ο ζητούμενος είναι ο 2

**4.**

Να βρείτε τις πιθανές τιμές του υπολοίπου της διαίρεσης **α)**  $\Delta : 4$     **β)**  $\Delta : 7$

**Απάντηση**

**α)**  $v = 0, 1, 2, 3$     **β)**  $v = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

**5.**

Να γίνουν οι πράξεις

α)  $77:7 - 4^2:2^2 + (169:13 - 10)^2$

β)  $3 : (5 - 2^2)^2 + 16: (29 - 3^3)^3$

γ)  $42(3^2 - 144:48) - (12^2:6^2) + (5^2 - 3^2)$

σχόλιο 5

**Προτεινόμενη λύση**

α)

$$\begin{aligned} 77:7 - 4^2:2^2 + (169:13 - 10)^2 &= 77:7 - 4^2:2^2 + (13 - 10)^2 = \\ &= 77:7 - 4^2:2^2 + 3^2 = \\ &= 77:7 - 16:4 + 9 = \\ &= 11 - 4 + 9 = 7 + 9 = 16 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} 3 : (5 - 2^2)^2 + 16 : (29 - 3^3)^3 &= 3 : (5 - 4)^2 + 16 : (29 - 27)^3 = \\ &= 3 : 1^2 + 16:2^3 = \\ &= 3 : 1 + 16:8 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 42(3^2 - 144:48) - (12^2:6^2) + (5^2 - 3^2) &= 42(9 - 144:48) - (144:36) + (25 - 9) = \\ &= 42(9 - 3) - 4 + 16 = \\ &= 42 \cdot 6 - 4 + 16 = \\ &= 252 - 4 + 16 = 248 + 16 = 264 \end{aligned}$$

**6)**

α) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το υπόλοιπο  $\upsilon$  της διαίρεσης με διαιρέτη το 7 και πηλίκο 14. Για την παραπάνω τιμή να υπολογίσετε τον διαιρετέο

β) Να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο διαιρέτης  $\delta$  μιας διαίρεσης με υπόλοιπο 4 και πηλίκο 17. Για την τιμή αυτή να βρείτε τον διαιρετέο.

**Προτεινόμενη λύση**

α)

Η μεγαλύτερη τιμή του υπόλοιπου είναι το 6.

Για  $\upsilon = 6$ , ο διαιρετέος είναι  $\Delta = 7 \cdot 14 + 6 = 98 + 6 = 104$

β)

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο διαιρέτης είναι η  $\delta = 5$ .

Για  $\delta = 5$  ο διαιρετέος είναι  $\Delta = 5 \cdot 17 + 4 = 85 + 4 = 89$

θεωρία 1

**7.**

Ένα σχολείο με 416 μαθητές θα πάει εκδρομή . Πόσα πούλμαν 52 θέσεων θα απαιτηθούν ;

Αν για κάθε 32 παιδιά απαιτείται ένας συνοδός καθηγητής, πόσοι συνοδοί θα συνοδεύσουν τα παιδιά ; Τι θα γίνει τώρα με τα πούλμαν ;

Τα ξενοδοχείο στο οποίο θα κοιμηθούν έχει μόνο τρίκλινα δωμάτια πόσα δωμάτια θα χρειαστούν ;

**Προτεινόμενη λύση**

- Θα απαιτηθούν τόσα πούλμαν όσο είναι το ηλίκο της διαίρεσης  $416 : 52$   
Κάνοντας τη διαίρεση βρίσκουμε ηλίκο 8 και υπόλοιπο 0.  
Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά καλύπτουν ακριβώς τις θέσεις των πούλμαν.
- Επειδή  $416 : 32 = 13$  , θα χρειαστούν 13 συνοδοί καθηγητές και ένα ακόμα πούλμαν τουλάχιστον 13 θέσεων .
- Το σύνολο των ατόμων που θα κοιμηθούν στο ξενοδοχείο είναι  $416 + 13 = 429$   
Θα απαιτηθούν  $429 : 3 = 143$  τρίκλινα δωμάτια

**8.**

Για την αγορά γλυκών δώσαμε 21 €. Αν αγοράζαμε 5 παραπάνω, θα δίναμε 36 €  
Πόσο κόστιζε το ένα γλυκό;

**Προτεινόμενη λύση**

Τα 5 επιπλέον γλυκά κοστίζουν  $36 - 21 = 15$  €

Άρα το κάθε γλυκό κοστίζει  $15 : 5 = 3$  €

**9.**

Ένας μαθητής αγόρασε 15 τετράδια και 23 στυλό, και πλήρωσε 3790 λεπτά του ευρώ. Αν κάθε στυλό κόστιζε 80 λεπτά, να βρείτε πόσο κόστιζε το κάθε τετράδιο.

**Προτεινόμενη λύση**

Το κόστος των στυλό ήταν  $23 \cdot 80 = 1840$  λεπτά

Το κόστος των τετραδίων ήταν  $3790 - 1840 = 1950$

Το κάθε τετράδιο κόστιζε  $1950 : 15 = 130$  λεπτά

**10.**

α) Να βρείτε πόσες εβδομάδες έχει το ένα έτος γνωρίζοντας ότι το έτος έχει 365 ημέρες

β) Αν σήμερα είναι Δευτέρα , τι ημέρα θα είναι μετά από 300 ημέρες ;

**Προτεινόμενη λύση****α)**

Η διαίρεση  $365 : 7$  δίνει ηλίκο 52 και υπόλοιπο 1.

Άρα το ένα έτος αποτελείται από 52 εβδομάδες και περισσεύει 1 ημέρα.

**β)**

Επειδή  $300 = 7 \cdot 42 + 6$ , αυτό σημαίνει ότι μετά από 300 ημέρες θα έχουν περάσει 42 εβδομάδες και 6 ημέρες .

Κάθε 7 ημέρες επαναλαμβάνεται η Δευτέρα. Επειδή θα περάσουν και 6 ημέρες ακόμα , τότε θα είναι Κυριακή.

θεωρία 1
----------