

1.5 ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

ΜΚΔ – ΕΚΠ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πολλαπλάσια του a : Είναι οι αριθμοί που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τον a με όλους τους φυσικούς.
Είναι δηλαδή οι αριθμοί $0, 1a, 2a, 3a, 4a, \dots$

2.

Ιδιότητες : Κάθε φυσικός διαιρεί τα πολλαπλάσια του
Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του
Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλο θα διαιρεί και τα πολλαπλάσια αυτού

3.

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) : Το μικρότερο, όχι μηδέν, από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών

4.

Διαιρέτες του a : Είναι όλοι οι αριθμοί που διαιρούν τον a

5.

Δύο μόνιμοι διαιρέτες : Κάθε αριθμός $a \neq 0$ έχει διαιρέτες των εαυτού του και το 1

6.

Πρώτοι – σύνθετοι αριθμοί : Ένας αριθμός λέγεται πρώτος όταν έχει μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό του και την μονάδα
Αλλιώς λέγεται σύνθετος

7.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) : Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών

8.

Αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους : Οι αριθμοί α και β ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν έχουν ΜΚΔ τη μονάδα

9.

Κριτήρια διαιρετότητας :

- Ένας φυσικός διαιρείται με το 10 , 100 , 1000 ... αν λήγει σε 0, 00, 000 ,
- Ένας φυσικός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0, 2, 4, 6, 8
- Ένας φυσικός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5
- Ένας φυσικός διαιρείται με το 3 ή το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 3 ή το 9
- Ένας φυσικός διαιρείται με το 4 ή το 25 αν τα δύο τελευταία του ψηφία σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Κοινά πολλαπλάσια δύο ή : Βρίσκω τα πολλαπλάσια καθενός και επιλέγω τα περισσότερων αριθμών κοινά τους

2.

Κοινοί διαιρέτες δύο ή : Βρίσκω τους διαιρέτες καθενός και επιλέγω τους περισσότερων αριθμών κοινούς τους

3.

Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων : Σημαίνει να γράψω τον αριθμό σαν γινόμενο αριθμών που είναι πρώτοι μεταξύ τους

4.

Μέθοδος : Για να βρω το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών, τους αναλύω σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και σχηματίζω το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων καθέναν με τον μεγαλύτερο εκθέτη

5.

Μέθοδος : Για να βρω τον ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών, τους αναλύω σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και σχηματίζω το γινόμενο μόνο των κοινών παραγόντων καθέναν με τον μικρότερο εκθέτη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι πρώτοι και ποιοι σύνθετοι
11, 12, 13, 14, 15

Θεωρία 6

Προτεινόμενη λύση

- Ο 11 είναι πρώτος αφού μοναδικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το 11
- Ο 12 είναι σύνθετος διότι ένας διαιρέτης του είναι και το 2
- Ο 13 είναι πρώτος αφού μοναδικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το 13
- Ο 14 είναι σύνθετος διότι ένας διαιρέτης του είναι και το 2
- Ο 15 είναι σύνθετος διότι ένας διαιρέτης του είναι και το 5

2.

- α) Να αναλύσετε τους αριθμούς 160, 200, 256 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
β) Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των παραπάνω αριθμών

Προτεινόμενη λύση

Μέθοδοι
4-5

α)

160	2	200	2	256	2
80	2	100	2	128	2
40	2	50	2	64	2
20	2	25	5	32	2
10	2	5	5	16	2
5	5	1		8	2
1				4	2
				2	2
				1	

$$160 = 2^5 \cdot 5 \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2 \quad 256 = 2^8$$

β)

$$\text{ΜΚΔ}(160, 200, 256) = 2^3 = 8$$

$$\text{ΕΚΠ}(160, 200, 256) = 2^8 \cdot 5^2 = 256 \cdot 25 = 6400$$

3.

Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών διαφορετικών του 1 είναι πρώτος ή σύνθετος ;
Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου .

Θεωρία 6

Προτεινόμενη λύση

Είναι σύνθετος διότι αν α πρώτος και β πρώτος τότε το γινόμενο αυτών είναι ο αριθμός $\alpha\beta$ ο οποίος προφανώς διαιρείται και με το α και με το β

4.

Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά

Επειδή $20 = 4 \cdot 5$, ο αριθμός 20 είναι ένα του 5 και ο αριθμός 4 είναι ένας του 20

Απάντηση

Θεωρία 1- 4

Επειδή $20 = 4 \cdot 5$ ο αριθμός 20 είναι ένα **πολλαπλάσιο** του 5 και ο αριθμός 4 είναι ένας **διαιρέτης** του 20

5.

Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών 20 και 250

Προτεινόμενη λύση

Αναλύοντας τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων όπως στην άσκηση 2 βρίσκουμε ότι $20 = 2^2 \cdot 5$ και $250 = 2 \cdot 5^3$

Άρα $\text{ΜΚΔ}(20, 250) = 2 \cdot 5 = 10$

και $\text{ΕΚΠ}(20, 250) = 2^2 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$

Σχόλια 4 - 5

6.

Να συμπληρώσετε τα ψηφία που λείπουν στον παρακάτω αριθμό $32-1-$ ώστε αυτός να διαιρείται **α)** με το 3 και το 5, **β)** με το 2 και το 9

Προτεινόμενη λύση

α)

Για να διαιρείται ο αριθμός με το 5, θα πρέπει να λήγει σε 0 ή 5.

Άρα ο ζητούμενος θα έχει την μορφή $32-10$ ή $32-15$

Για να διαιρείται και με το 3, θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 3. Οπότε στην πρώτη περίπτωση το ψηφίο που λείπει μπορεί να είναι 0 ή 3 ή 6 ή 9 ενώ στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να είναι 1 ή 4 ή 7.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός μπορεί να είναι κάποιος από τους :

32010, 32310, 32610, 32910, 32115, 32415, 32715

β)

Για να διαιρείται ο αριθμός με το 2, θα πρέπει να λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8.

Άρα ο ζητούμενος θα έχει την μορφή :

$32-10$ ή $32-12$ ή $32-14$ ή $32-16$ ή $32-18$

Για να διαιρείται και με το 9, θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 9.

Οπότε στην πρώτη περίπτωση το ψηφίο που λείπει μπορεί να είναι το 3

στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να είναι το 1

στη τρίτη περίπτωση μπορεί να είναι το 8

στη τέταρτη περίπτωση μπορεί να είναι το 6

στη πέμπτη περίπτωση μπορεί να είναι το 4

Άρα ο ζητούμενος αριθμός μπορεί να είναι κάποιος από τους :

32310, 32112, 32814, 32616, 32418

Θεωρία 9

7.

α) Μπορείτε να βρείτε κριτήριο διαιρετότητας αριθμού με το 6 ;

β) Να γράψετε δύο αριθμούς μεγαλύτερους του 200 που να διαιρούνται με το 6.

Προτεινόμενη λύση

α)

Ένας αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται και με το 2 και με το 3.

Διότι αν π.χ ο αριθμός a διαιρείται με το 2, τότε αυτός θα είναι πολλαπλάσιο του 2.Άρα θα είναι της μορφής $a = 2κ$ (1)Επειδή ο a διαιρείται και με το 3, θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο και του 3.Ο a έχει την μορφή $a = 2κ$ και το 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.Άρα θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3 ο $κ$, δηλαδή $κ = 3λ$.Τότε η (1) γίνεται $a = 2 \cdot 3λ = 6λ$. Συνεπώς ο a διαιρείται με το 6

Θεωρία 2 - 4

β)

Οι αριθμοί θα πρέπει να λήγουν σε 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8 και το άθροισμα των ψηφίων τους να διαιρείται με το 3.

Δύο τέτοιοι αριθμοί είναι ο 648 και ο 5016

8.

Να συμπληρώσετε τα ψηφία που λείπουν, ώστε οι αριθμοί $5--$ και $305-1-$ να διαιρούνται ταυτόχρονα με 2, 3 και 5.

Θεωρία 9

Προτεινόμενη λύσηΓια να διαιρείται ο αριθμός $5--$ με το 2 και με το 5, θα πρέπει να είναι της μορφής $5-0$

Και για να διαιρείται με το 3, το ψηφίο που λείπει πρέπει να είναι 1 ή 4 ή 7.

Επομένως ο αριθμός μπορεί να είναι ένας από τους : 510 ή 540 ή 570

Με το ίδιο σκεπτικό, ο άλλος αριθμός μπορεί να είναι ένας από τους 305010 ή 305310 ή 305610 ή 305910

9.

Ένα ανθοπωλείο διαθέτει 32 τριαντάφυλλα , 48 γαρύφαλλα και 72 κρίνους και θέλει να φτιάξει όμοιες ανθοδέσμες χωρίς να του περισσέψει κανένα λουλούδι .

α) Πόσες το πολύ ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει ;

β) Πόσα λουλούδια από το κάθε είδος θα περιέχει κάθε ανθοδέσμη ;

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 5

α)

Ο ζητούμενος αριθμός πρέπει να είναι κοινός διαιρέτης των 32 , 48 , 72

Επειδή όμως ζητάμε τον μέγιστο αριθμό των ανθοδεσμών, αυτός πρέπει να είναι ο ΜΚΔ(32, 48, 72)

$$\text{Είναι : } 32 = 2^5, \quad 48 = 3 \cdot 2^4, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\text{Άρα } \text{ΜΚΔ}(32, 48, 72) = 2^3 = 8$$

Επομένως μπορεί να φτιαχτούν 8 το πολύ ανθοδέσμες

β)

Σε κάθε ανθοδέσμη θα υπάρχουν $32 : 8 = 4$ τριαντάφυλλα

$$48 : 8 = 6 \text{ γαρύφαλλα}$$

$$72 : 8 = 9 \text{ κρινάκια}$$

10.

Αν $\text{ΕΚΠ}(α, β, γ) = 27$ και $α, β, γ, > 1$, να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 6

Επειδή $27 = 3^3$, οι ζητούμενοι αριθμοί πρέπει να έχουν παράγοντα μία δύναμη του 3 μικρότερη ή ίση του 27.

Οι ζητούμενες δυνάμεις είναι $3^1, 3^2, 3^3$, επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 3, 9, 27

11.

Τρεις συμμαθητές τρώνε πίτσα στην πιτσαρία της γειτονιάς τους, ο πρώτος κάθε 8 ημέρες, ο δεύτερος κάθε 10 ημέρες και ο τρίτος κάθε 15 ημέρες .

Αν σήμερα συναντήθηκαν στην πιτσαρία να βρείτε μετά από πόσες ημέρες το συντομότερο θα ξανασυναντηθούν και στο ενδιάμεσο διάστημα πόσες φορές θα έχει πάει ο καθένας μόνος του;

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 6

Ο ζητούμενος αριθμός ημερών πρέπει να είναι πολλαπλάσιο των 8 , 10 , 15

Επειδή ζητάμε την ταυτόχρονη παρουσία στην πιτσαρία, ο αριθμός πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των 8, 10, 15 και μάλιστα το ΕΚΠ, διότι μας ενδιαφέρει το συντομότερο δυνατόν η ταυτόχρονη παρουσία.

$$\text{Εύκολα βρίσκουμε ότι } \text{ΕΚΠ}(8, 10, 15) = 120$$

Συνεπώς σε 120 ημέρες θα ξανά φάνε μαζί πίτσα.

Στο διάστημα αυτό ο πρώτος θα έχει πάει $120 : 8 = 15$ φορές , οπότε μόνος 14

ο δεύτερος θα έχει πάει $120 : 10 = 12$ φορές , οπότε μόνος 11

ο τρίτος θα έχει πάει $120 : 15 = 8$ φορές , οπότε μόνος 7

12.

- α) Να βρείτε 5 τουλάχιστον κοινά όχι 0 πολλαπλάσια των αριθμών 8 και 12.
 β) Να βρείτε το ΕΚΠ(8, 12). Συσχετίζοντας το συμπέρασμα του (α) με την απάντησή στο (β) τι παρατηρείτε;

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1
 Θεωρία 3

α)

Πολλαπλάσια του 8 : 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120

Πολλαπλάσια του 12 : 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120

Κοινά πολλαπλάσια : 0, 24, 48, 72, 96, 120

5 κοινά μη μηδενικά πολλαπλάσια είναι τα 24, 48, 72, 96, 120

β)

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\text{ΕΚΠ}(8, 12) = 24$

Παρατηρούμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια είναι πολλαπλάσια του ΕΚΠ.

13.

Στον αριθμό 4–8– – να βρείτε τα ψηφία που λείπουν ώστε αυτός να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2, το 3 και το 25.

Θεωρία 9

Προτεινόμενη λύση

Για να διαιρείται ο αριθμός 4–8– – με το 2 και το 25, τα δύο τελευταία ψηφία πρέπει να είναι το 50.

Συνεπώς ο αριθμός είναι της μορφής 4–850.

Για να διαιρείται με το 3, το ψηφίο που λείπει πρέπει να είναι 1 ή 4 ή 7.

Οπότε ο ζητούμενος αριθμός είναι κάποιος από τους 41850, 44850, 47850

14.

Συμπλήρωσε στις παρακάτω προτάσεις τα κενά

- α) Κάθε φυσικός διαιρεί τα του
 β) Αν ένας φυσικόςέναν άλλο θα και τα πολλαπλάσια του
 γ) Ένας αριθμός που διαιρείται μόνο λέγεται πρώτος
 δ) ΜΚΔ των α και β ονομάζεται ο.... των α και β
 ε) ΕΚΠ των α και β ονομάζεται το των α και β
 στ) Οι αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν

Απάντηση

- α) Κάθε φυσικός διαιρεί τα **πολλαπλάσια** του
 β) Αν ένας φυσικός **διαιρεί** έναν άλλο θα **διαιρεί** και τα πολλαπλάσια του
 γ) Ένας αριθμός που διαιρείται μόνο **από τον εαυτό του και την μονάδα** λέγεται πρώτος
 δ) ΜΚΔ των α και β ονομάζεται ο **μεγαλύτερος των κοινών διαιρετών** των α και β
 ε) ΕΚΠ των α και β ονομάζεται το **μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια** των α και β
 στ) Οι αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν **$\text{ΜΚΔ}(α, β) = 1$**

15.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Το ΕΚΠ των 2, 10, 20 είναι το 40 (Λ)
- β) Ο ΜΚΔ των 3, 6, 18 είναι το 3 (Σ)
- γ) Ο 15 είναι πρώτος (Λ)
- δ) Ο 7 είναι πρώτος (Σ)
- ε) Η γραφή $2 \cdot 6 \cdot 5^2$ είναι ανάλυση του αριθμού 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (Λ)

Απάντηση

- α) $\text{ΕΚΠ}(2, 10, 20) = 20$ πρόταση (Λ)
- β) $\text{ΜΚΔ}(3, 6, 18) = 3$ πρόταση (Σ)
- γ) Όχι αφού διαιρείται και με το 5 πρόταση (Λ)
- δ) Ναι διότι μοναδικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το 7 πρόταση (Σ)
- ε) $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ οπότε πρόταση (Λ)