

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εξίσωση με έναν άγνωστο: Ονομάζουμε μία ισότητα η οποία περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα που είναι ο άγνωστος της εξίσωσης .

2.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης : Είναι ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον άγνωστο η εξίσωση γίνεται αληθινή αριθμητική ισότητα (επαληθεύεται)

3.

Επίλυση εξίσωσης : Είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε την λύση της εξίσωσης

4.

Αόριστη εξίσωση: Είναι η εξίσωση που επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του αγνώστου

5.

Αδύνατη εξίσωση : Είναι η εξίσωση που δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του αγνώστου

6.

Βασικές εξισώσεις και οι λύσεις τους :

Στις παρακάτω εξισώσεις το x είναι ο άγνωστος ενώ τα a και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί

Εξίσωση	Λύση
$x + a = \beta$	$x = \beta - a$
$x - a = \beta$	$x = a + \beta$
$a - x = \beta$	$x = a - \beta$
$ax = \beta$	$x = \beta : a$
$x : a = \beta$	$x = a \cdot \beta$
$a : x = \beta$	$x = a : \beta$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Για την λύση μιας εξίσωσης

Για να λύσουμε μία εξίσωση εφαρμόζουμε όποιες ιδιότητες έχουμε μάθει ώστε η εξίσωση να πάρει μία από τις μορφές του (6) της θεωρίας και στη συνέχεια την λύνουμε.

2.

Χρήσιμη πρόταση: Αν δύο κλάσματα είναι ίσα και έχουν ίσους παρονομαστές τότε θα έχουν ίσους και τους αριθμητές ενώ αν έχουν ίσους αριθμητές θα έχουν ίσους και τους παρονομαστές

3.

Υπενθύμιση : Αν δύο κλάσματα είναι ίσα τότε και τα «χιαστί» γινόμενα είναι ίσα

4.

Μορφή της αόριστης εξίσωσης : Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αόριστη

5.

Μορφή της αδύνατης εξίσωσης : Η εξίσωση $0x = \alpha \neq 0$ είναι αδύνατη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με ένα Σ αν είναι σωστές και με ένα Λ αν είναι λανθασμένες

α) Το 2 είναι λύση της εξίσωσης $3x + 5 = 11$ Σ

β) Το 12 είναι λύση της εξίσωσης $37 - 2x = 15$ Λ

γ) Αν $\frac{2x}{5} = \frac{14}{5}$ τότε $14 = 2x$ Σ

δ) Η εξίσωση $4 = 0x$ είναι αόριστη Λ

ε) Αν $\frac{5}{x} = \frac{3}{9}$ τότε $3x = 45$ Σ

στ) Η εξίσωση $0 = 0x$ είναι αδύνατη Λ

Προτεινόμενη λύση

α)

Η εξίσωση για $x = 2$ γίνεται $3 \cdot 2 + 5 = 11$, $11 = 11$ αληθές,
Άρα η πρόταση είναι σωστή.

β)

Η εξίσωση για $x = 12$ γίνεται $37 - 2 \cdot 12 = 15$, $13 = 15$ ψευδές.
Άρα η πρόταση είναι λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

στ) Λάθος

Θεωρία 2

Σχόλια 2 - 3 - 4 - 5

2.

Στις παρακάτω προτάσεις συμπληρώστε τα κενά

α) Η αόριστη εξίσωση αληθεύει για του αγνώστου

β) Λύση μιας εξίσωσης ονομάζουμε τον που αν αντικαταστήσει τον άγνωστο η εξίσωση επαληθεύεται

γ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4, στη μαθηματική γλώσσα, γράφεται

δ) Η ισότητα $x - 3 = 12$ στην καθημερινή γλώσσα διατυπώνεται με:
ένας μειωμένος είναι με 12

ε) Η εξίσωση $0x = 7$ είναι

Απάντηση

α)

Η αόριστη εξίσωση αληθεύει για **οποιαδήποτε τιμή** του αγνώστου

β)

Λύση μιας εξίσωσης ονομάζουμε τον **αριθμό** που αν αντικαταστήσει τον άγνωστο η εξίσωση επαληθεύεται

γ)

Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4, στην μαθηματική γλώσσα, γράφεται **$3x + 4$**

δ)

Η παράσταση $x - 3 = 12$ στην καθημερινή γλώσσα διατυπώνεται με:
ένας **αριθμός** μειωμένος **3** είναι **ίσος** με 12

ε)

Η εξίσωση $0x = 7$ είναι **αδύνατη**

3.

Σε κάθε εξίσωση της 1^{ης} γραμμής αντιστοιχίστε την λύση της από την 2^η γραμμή

1. $\alpha + x = \beta$	2. $x - \alpha = \beta$	3. $\alpha x = \beta$	4. $x : \alpha = \beta$	5. $\alpha : x = \beta$
i. $x = \alpha + \beta$	ii. $x = \alpha\beta$	iii. $x = \alpha : \beta$	vi. $x = \beta : \alpha$	v. $x = \beta - \alpha$

Απάντηση

1 \rightarrow v , 2 \rightarrow i , 3 \rightarrow vi , 4 \rightarrow ii , 5 \rightarrow iii

Θεωρία 6

4.

Να μετατρέψετε στη γλώσσα των μαθηματικών τις παρακάτω εκφράσεις

α) Το διπλάσιο ενός αριθμού διαιρούμενο με το 5 είναι ίσο με 7

β) Τα $\frac{3}{5}$ ενός αριθμού ισούται με 2

γ) Ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι το 2

δ) Το μισό του αθροίσματος δύο αριθμών

ε) Τα $\frac{4}{5}$ ενός αριθμού αυξημένα κατά το μισό του αριθμού

Απάντηση

α) $(2x) : 5 = 7$

β) $\frac{3}{5}x = 2$

γ) $\frac{1}{x} = 2$

δ) $\frac{x+y}{2}$

ε) $\frac{4}{5}x + \frac{x}{2}$

5.

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε απλούστερη μορφή

α) $8x + 2x + x + 5x$

β) $3\alpha + 5\alpha + 8\alpha$

γ) $14\beta + 3\beta - 2\beta$

δ) $4,2\gamma + 5,6\gamma + 7,1\gamma - 5\gamma$

ε) $6,3\delta - 4\delta + 5,2\delta - 1,7\delta$

στ) $\kappa + 1,4\kappa - 0,3\kappa$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$8x + 2x + x + 5x = (8 + 2 + 1 + 5)x = 16x$$

β)

$$3\alpha + 5\alpha + 8\alpha = (3 + 5 + 8)\alpha = 16\alpha$$

γ)

$$14\beta + 3\beta - 2\beta = (14 + 3 - 2)\beta = 15\beta$$

δ)

$$4,2\gamma + 5,6\gamma + 7,1\gamma - 5\gamma = (4,2 + 5,6 + 7,1 - 5)\gamma = 11,9\gamma$$

ε)

$$6,3\delta - 4\delta + 5,2\delta - 1,7\delta = (6,3 - 4 + 5,2 - 1,7)\delta = 5,8\delta$$

στ)

$$\kappa + 1,4\kappa - 0,3\kappa = (1 + 1,4 - 0,3)\kappa = 2,1\kappa$$

6.

Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $4 + x = 12$ β) $25 - x = 18$ γ) $x - 4 = 19$ δ) $3x = 45$ ε) $x : 4 = 3$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$4 + x = 12 \quad \text{άρα} \quad x = 12 - 4 = 8$$

Θεωρία 6

β)

$$25 - x = 18 \quad \text{άρα} \quad x = 25 - 18 = 7$$

γ)

$$x - 4 = 19 \quad \text{άρα} \quad x = 19 + 4 = 23$$

δ)

$$3x = 45 \quad \text{άρα} \quad x = 45 : 3 = 15$$

ε)

$$x : 4 = 3 \quad \text{άρα} \quad x = 3 \cdot 4 = 12$$

7.

Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\frac{x+2}{5} + 2 = \frac{14}{5}$ β) $\frac{x+12}{7} - 1 = \frac{11}{7}$ γ) $\frac{4-x}{4} + 3 = \frac{1}{4}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{x+2}{5} + 2 = \frac{14}{5} \quad \text{άρα} \quad \frac{x+2}{5} + \frac{10}{5} = \frac{14}{5}$$

Σχόλια 1-2
Θεωρία 6

$$\frac{x+2+10}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{x+12}{5} = \frac{14}{5}$$

$$x + 12 = 14 \quad \text{συνεπώς} \quad x = 14 - 12 = 2$$

β)

$$\frac{x+12}{7} - 1 = \frac{11}{7} \quad \text{άρα} \quad \frac{x+12}{7} - \frac{7}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\frac{x+12-7}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\frac{x+5}{7} = \frac{11}{7}$$

$$x + 5 = 11 \quad \text{συνεπώς} \quad x = 11 - 5 = 6$$

γ)

$$\frac{4-x}{4} + 3 = \frac{1}{4} \quad \text{άρα} \quad \frac{4-x}{4} + \frac{12}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4-x+12}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{ή}$$

$$\frac{16-x}{4} = \frac{1}{4}$$

$$16 - x = 1 \quad \text{συνεπώς} \quad x = 16 - 1 = 15$$

8.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) 2y + 3y + 5y = 15 \quad \beta) 3t + 5t - 2t = 12 \quad \gamma) 3\omega + 4\omega - \omega = 12 + 4 - 1 + 15$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$2y + 3y + 5y = 15 \quad \text{άρα } (2 + 3 + 5)y = 15 \\ 10y = 15 \\ y = 15 : 10 = 1,5$$

Σχόλιο 1
Θεωρία 6**β)**

$$3t + 5t - 2t = 12 \quad \text{άρα } (3 + 5 - 2)t = 12 \\ 6t = 12 \\ t = 12 : 6 = 2$$

γ)

$$3\omega + 4\omega - \omega = 12 + 4 - 1 + 15 \quad \text{άρα } (3 + 4 - 1)\omega = 30 \\ 6\omega = 30 \\ \omega = 30 : 6 = 5$$

9.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) \frac{2x}{7} = \frac{3}{5} \quad \beta) \frac{4}{x+1} = \frac{4}{9} \quad \gamma) \frac{5}{2x} = \frac{5}{9} \quad \delta) \frac{3}{7} = \frac{21}{x}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\frac{2x}{7} = \frac{3}{5} \quad \text{άρα } 2x \cdot 5 = 3 \cdot 7 \\ 10x = 21 \\ x = 21 : 10 = 2,1$$

Σχόλια 1-3
Θεωρία 6**β)**

$$\frac{4}{x+1} = \frac{4}{9} \quad \text{άρα } x + 1 = 9 \quad \text{οπότε } x = 9 - 1 = 8$$

Σχόλιο 2
Θεωρία 6**γ)**

$$\frac{5}{2x} = \frac{5}{9} \quad \text{άρα } 2x = 9 \quad \text{οπότε } x = 9 : 2 = 4,5$$

$$\delta) \frac{3}{7} = \frac{21}{x} \quad \text{άρα } 3x = 21 \cdot 7, \quad 3x = 147, \quad x = 147 : 3 = 49$$

10.

Στο διπλανό ορθογώνιο η περίμετρος είναι ίση με 32cm.
Να υπολογίσετε το μήκος των διαστάσεων του

Προτεινόμενη λύση

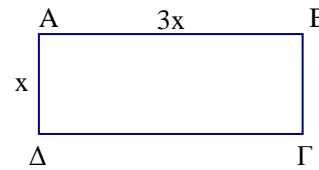
$$AB + BG + ΓΔ + ΔΑ = 32$$

$$3x + x + 3x + x = 32 \text{ οπότε } (3 + 1 + 3 + 1)x = 32$$

$$8x = 32$$

$$x = 32:8 = 4$$

Τότε $AB = ΔΓ = 3 \cdot 4 = 12$ και $AΔ = BΓ = 4$

**11.**

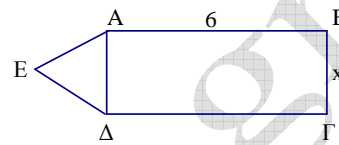
Στο διπλανό σχήμα το $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο
και το $AΔΕ$ ισόπλευρο τρίγωνο

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π του ορθογωνίου
ως συνάρτηση του x

β) Να εκφράσετε την περίμετρο Π_1 του τριγώνου
ως συνάρτηση του x

γ) Να εκφράσετε την περίμετρο Π_2 του σχήματος $ABΓΔΕ$
ως συνάρτηση του x

δ) Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με 9, να υπολογίσετε την περίμετρο του
ορθογωνίου και την περίμετρο του σχήματος $ABΓΔΕ$.

**Προτεινόμενη λύση**

α)

$$\Pi = AB + BΓ + ΓΔ + ΔΑ = 6 + x + 6 + x = 12 + 2x$$

β)

$$\Pi_1 = EA + AΔ + ΔE = x + x + x = 3x$$

γ)

$$\Pi_2 = AB + BΓ + ΓΔ + ΔE + EA = 6 + x + 6 + x + x = 12 + 3x$$

δ)

$$\Pi_1 = 9 \text{ άρα } 3x = 9 \text{ επομένως } x = 9:3 = 3 \text{ τότε}$$

$$\Pi = 12 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18 \text{ και}$$

$$\Pi_2 = 12 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 = 21$$

12.

Αν $x = 4$, $y = 2$ και $\omega = 2,5$

α) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$$A = (x + 2)y + 3xy\omega \quad B = (x - y)^2 \quad \Gamma = 3x^2 - 5y^2 + 2\omega^2$$

β) Για τις τιμές που θα βρείτε να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i) } \alpha + 2 = A \quad \text{ii) } 14 - \beta = B \quad \text{iii) } 5\gamma = \Gamma$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} A &= (4 + 2) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2,5 = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2,5 = \\ &= 12 + 60 = \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$B = (4 - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2,5^2 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6,25 = \\ &= 48 - 20 + 12,5 = 40,5 \end{aligned}$$

β)

$$\text{i) } \alpha + 2 = 72 \text{ οπότε } \alpha = 72 - 2 = 70$$

$$\text{ii) } 14 - \beta = 4 \text{ οπότε } \beta = 14 - 4 = 10$$

$$\text{iii) } 5\gamma = 40,5 \text{ άρα } \gamma = 40,5 : 5 = 8,1$$

13.

Να βρείτε 5 τιμές του φυσικού αριθμού n ώστε το κλάσμα $\frac{63}{\frac{n+1}{3} \cdot \frac{2}{2}}$ να είναι

φυσικός αριθμός.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Αν } n = 0, \text{ το κλάσμα γίνεται } \frac{63}{\frac{0+1}{3} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{3 \cdot 1} = 42 \text{ που είναι φυσικός}$$

$$\text{Αν } n = 1, \text{ το κλάσμα γίνεται } \frac{63}{\frac{1+1}{3} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 21 \text{ που είναι φυσικός}$$

$$\text{Αν } n = 2, \text{ το κλάσμα γίνεται } \frac{63}{\frac{2+1}{3} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{3 \cdot 3} = 14 \text{ που είναι φυσικός}$$

$$\text{Αν } n = 6, \text{ το κλάσμα γίνεται } \frac{63}{\frac{6+1}{3} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{3 \cdot 7} = 6 \text{ που είναι φυσικός}$$

Αν $v = 20$, το κλάσμα γίνεται $\frac{\frac{63}{20+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{3 \cdot 21} = 2$ που είναι φυσικός

14.

Από έναν αριθμό αφαιρούμε 12 και βρίσκουμε 1456. Να βρείτε τον αριθμό

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός τότε σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε
 $x - 12 = 1456$ άρα $x = 1456 + 12 = 1468$

15.

Αν από το μισό του αθροίσματος ενός αριθμού με το 13 αφαιρέσουμε 4 βρίσκουμε $\frac{13}{2}$. Να βρείτε τον αριθμό.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε

$$\frac{x+13}{2} - 4 = \frac{13}{2} \quad \text{άρα} \quad \frac{x+13}{2} - \frac{8}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\frac{x+13-8}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\frac{x+5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$x + 5 = 13 \quad \text{επομένως} \quad x = 13 - 5 = 8$$