

4.2 – 4.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πρόβλημα : Ονομάζουμε την κατάσταση που δημιουργείται όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθεια μας να φτάσουμε σε έναν συγκεκριμένο στόχο.

2.

Επίλυση προβλήματος : Είναι η διαδικασία που ακολουθούμε έτσι ώστε να επιτύχουμε το στόχο.

3.

Επίλυση προβλήματος με την βοήθεια εξίσωσης

- Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το εκφράζουμε με τη βοήθεια ενός γράμματος, συνήθως με το x
- Εκφράζουμε, με την βοήθεια του x , στοιχεία του προβλήματος
- Δημιουργούμε μία εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα
- Λύνουμε την εξίσωση και ελέγχουμε την ορθότητα της λύσης

4.

Παρατήρηση : Υπάρχουν προβλήματα που δεν λύνονται με εξισώσεις, όπως επίσης υπάρχουν προβλήματα που είναι άλυτα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

- a) Να εκφράσετε, με τη βοήθεια μιας μεταβλητής, το ότι ο αριθμός a είναι άρτιος.
- β) Να βρείτε τρεις διαδοχικούς άρτιους αριθμούς με άθροισμα 216

Προτεινόμενη λύση

a)

Για να είναι ο a άρτιος θα πρέπει να διαιρείται με το 2, δηλαδή να είναι της μορφής $a = 2n$ όπου n φυσικός αριθμός

β)

Αν $2n$ είναι ο ποιο μικρός από τους ζητούμενους άρτιος αριθμός, τότε οι δύο διαδοχικοί του είναι οι $2n + 2$ και $2n + 4$.

Τότε με βάση το πρόβλημα ισχύει $2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 216$ άρα

$$6n + 6 = 2106$$

$$6n = 216 - 6$$

$$6n = 210$$

$$n = 210 : 6 = 35$$

Επομένως οι ζητούμενοι άρτιοι είναι οι $2n = 2 \cdot 35 = 70$, $2n + 2 = 72$, $2n + 4 = 74$

2.

- α) Έχουμε πέντε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Αν ο μεσαίος είναι ο x , να εκφράσετε τους υπόλοιπους με την βοήθεια του x και να τους διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο
- β) Αν το άθροισμα πέντε διαδοχικών φυσικών είναι 515 να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς.

Προτεινόμενη λύση**α)**

Οι δύο μικρότεροι του x αριθμοί είναι οι $x-2$ και $x-1$ και οι δύο μεγαλύτεροι οι $x+1$ και $x+2$.

Διάταξη από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο : $x-2 < x-1 < x < x+1 < x+2$

β)

Από την υπόθεση του προβλήματος είναι $x-2 + x-1 + x + x+1 + x+2 = 515$
 $5x = 515$
 $x = 515 : 5 = 103$

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 101, 102, 103, 104, 105

3.

Αγοράσαμε ένα τραπέζι και τέσσερις καρέκλες και πληρώσαμε 840 €. Αν το τραπέζι κόστιζε όσο τρεις καρέκλες, να βρείτε πόσο θα πληρώναμε αν αγοράζαμε πέντε καρέκλες μονάχα.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η αξία της μιας καρέκλας τότε το τραπέζι αξίζει $3x$ και οι 4 καρέκλες αξίζουν $4x$.

Με βάση το πρόβλημα ισχύει $3x + 4x = 840$ άρα $7x = 840$ οπότε
 $x = 840 : 7 = 120$

Επομένως η αξία της μιας καρέκλας είναι 120 €.

Αν αγοράζαμε 5 καρέκλες μόνο θα πληρώναμε $5 \cdot 120 = 600$ €

4.

Μοιράστηκαν 26100 € σε τρία άτομα Α, Β και Γ. Το άτομο Α πήρε 4500€ περισσότερα από το Β και το Γ πήρε 2100 € λιγότερα από το Β. Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε το κάθε άτομο.

Προτεινόμενη λύση

Αν το Β άτομο πήρε x €, τότε το Α πήρε $x + 4500$ και το Γ πήρε $x - 2100$.

Συνολικό ποσό που μοιράστηκε $x + 4500 + x + x - 2100 = 26100$

$$3x + 2400 = 26100$$

$$3x = 26100 - 2400$$

$$3x = 23700$$

$$x = 23700 : 3 = 7900$$

Οπότε το Β άτομο πήρε 7900 €, το Α πήρε $7900 + 4500 = 12400$ € και το Γ πήρε $7900 - 2100 = 5800$ €

5.

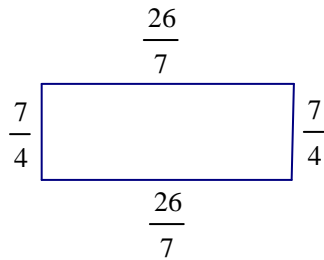
Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν $\frac{52}{8} \text{ cm}^2$ και μία πλευρά του είναι $\frac{7}{4} \text{ cm}$. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η άγνωστη διάσταση του ορθογωνίου, τότε

$$\text{εμβαδόν του ορθογωνίου} = \frac{7}{4} \cdot x = \frac{52}{8} \quad \text{άρα } x = \frac{52}{8} : \frac{7}{4} = \frac{52}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{26}{7} \text{ cm}$$

Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2 \cdot \frac{7}{4} + 2 \cdot \frac{26}{7} =$



$$\begin{aligned} &= \frac{7}{2} + \frac{52}{7} = \\ &= \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 7} + \frac{52 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \\ &= \frac{49}{14} + \frac{104}{14} = \frac{153}{14} \text{ cm} \end{aligned}$$

6.

Η Μαρία αγόρασε 15 τετράδια και 4 στυλό. Το κάθε στυλό κόστιζε 0,50 € λιγότερο από το κάθε τετράδιο. Να βρείτε την αξία του κάθε τετραδίου και του κάθε στυλό αν τα χρήματα που ξόδεψε είναι 36 €.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x € η αξία του κάθε τετραδίου τότε $x - 0,50$ € είναι η αξία του κάθε στυλό .

Τα 15 τετράδια αξίζουν $15x$ και τα 4 στυλό αξίζουν $4(x - 0,50) = 4x - 2$

Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $15x + 4x - 2 = 36$ άρα

$$19x - 2 = 36$$

$$19x = 36 + 2$$

$$19x = 38 \text{ άρα}$$

$$x = 38 : 19 = 2$$

Άρα το κάθε τετράδιο άξιζε 2 € και το κάθε στυλό 1,5 €.

7.

Ο όγκος του νερού όταν αυτό γίνεται πάγος αυξάνεται κατά τα $\frac{3}{46}$ αυτού. Να βρείτε από πόση ποσότητα νερού δημιουργήθηκε πάγος 49dm^3 .

Προτεινόμενη λύση

Αν $x \text{ dm}^3$ είναι ο αρχικός όγκος του νερού, τότε η αύξηση λόγω της πήξης είναι $\frac{3}{46}x$

Επομένως ο όγκος του πάγου είναι $x + \frac{3}{46}x = \frac{46}{46}x + \frac{3}{46}x = \frac{49}{46}x$

Τότε σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $\frac{49}{46}x = 49$ άρα

$$x = 49 : \frac{49}{46} \text{ οπότε } x = 49 \cdot \frac{46}{49} = 46$$

Επομένως ο αρχικός όγκος του νερού ήταν 46 dm^3

8.

Μία μπάλα αναπηδά σε ύψος ίσο με τα $\frac{2}{7}$ του ύψους από το οποίο αφέθηκε να πέσει.

Αν μετά από τρεις αναπηδήσεις η μπάλα φτάνει σε ύψος 12 cm , να βρείτε από ποιο ύψος αφέθηκε αρχικά να πέσει.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x \text{ cm}$ το αρχικό ύψος. Στην πρώτη αναπήδηση η μπάλα θα φτάσει σε ύψος

$\frac{2}{7}x$, στη δεύτερη αναπήδηση σε ύψος $\frac{2}{7}\left(\frac{2}{7}x\right) = \frac{4}{49}x$ και στην τρίτη αναπήδηση

σε ύψος $\frac{2}{7}\left(\frac{4}{49}x\right) = \frac{8}{343}x$. Αυτό το ύψος όμως είναι ίσο με 12 cm .

Άρα $\frac{8}{343}x = 12$ οπότε $x = 12 : \frac{8}{343} = 12 \cdot \frac{343}{8} = 514,5 \text{ cm}$

Άρα το αρχικό ύψος από το οποίο αφέθηκε να πέσει η μπάλα ήταν $514,5 \text{ cm}$

9.

Ένα αεροπλάνο έχει 384 θέσεις διατεταγμένες σε σειρές των 4 θέσεων. Να βρείτε πόσες σειρές θέσεων έχει το αεροπλάνο.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι το πλήθος των σειρών, τότε σε αυτές υπάρχουν $4x$ θέσεις.

Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $4x = 384$ άρα $x = 384 : 4 = 96$

Άρα το αεροπλάνο έχει 96 σειρές των 4 θέσεων

10.

Ένα τούβλο ζυγίζει 1 kg και μισό τούβλο. Να βρείτε πόσο ζυγίζουν τα 10 τούβλα.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι το βάρος του τούβλου τότε $\frac{x}{2}$ είναι το βάρος του μισού τούβλου

Σύμφωνα με το πρόβλημα, αν από το βάρος του τούβλου αφαιρέσουμε το βάρος του μισού τούβλου το αποτέλεσμα είναι 1 kg.

$$\text{Οπότε } x - \frac{x}{2} = 1 \quad \text{άρα } \frac{2x}{2} - \frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x = 2$$

Δηλαδή το ένα τούβλο ζυγίζει 2 kg

Οπότε τα 10 τούβλα ζυγίζουν $10 \cdot 2 = 20$ kg .

11.

Οι ηλικίες δύο αδελφών έχουν άθροισμα 77. Ο μικρότερος αδελφός έχει ηλικία ίση με το μισό της ηλικίας του μεγαλύτερου αυξημένη κατά 17. Να βρείτε τις ηλικίες των αδελφών.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η ηλικία του μεγαλύτερου αδελφού τότε ο μικρότερος είναι $\frac{x}{2} + 17$ ετών.

Όμως σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $x + \frac{x}{2} + 17 = 77$

$$\frac{2x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{34}{2} = 77$$

$$\frac{2x + x + 34}{2} = 77$$

$$\frac{3x + 34}{2} = 77$$

$$3x + 34 = 2 \cdot 77$$

$$3x + 34 = 154$$

$$3x = 154 - 34$$

$$3x = 120 \quad \text{άρα } x = 120 : 3 = 40$$

Επομένως ο μεγαλύτερος αδελφός ήταν 40 ετών και ο μικρότερος $20 + 17 = 37$ ετών

12.

Τα $\frac{2}{7}$ ενός χρηματικού ποσού είναι 5200 €. Να βρείτε πόσα χρήματα είναι τα $\frac{3}{4}$ του ποσού.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι το ποσό τότε τα $\frac{2}{7}$ αυτού είναι $\frac{2}{7}x$

Με βάση το πρόβλημα, είναι $\frac{2}{7}x = 5200$ άρα $x = 5200 : \frac{2}{7} = 5200 \cdot \frac{7}{2} = 18200$

Δηλαδή το ποσό είναι 18200 € και επομένως τα $\frac{3}{4}$ αυτού είναι $\frac{3}{4} \cdot 18200 = 13650$ €

13.

Η διαφορά της ηλικίας ενός παιδιού από τον πατέρα του είναι 28 έτη. Να βρείτε την ηλικία του πατέρα αν η ηλικία του παιδιού είναι 14 έτη.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η ηλικία του πατέρα, τότε η διαφορά της ηλικίας του παιδιού από αυτήν είναι $x - 14$ και με βάση το πρόβλημα $x - 14 = 28$ άρα $x = 28 + 14 = 42$

Δηλαδή ο πατέρας είναι 42 ετών

14.

Ένας μανάβης ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του και αγόρασε 30kg πατάτες που κόστιζαν 0,40 € το κιλό, 25kg μήλα που κόστιζαν 0,60 € το κιλό και 15 kg πορτοκάλια που κόστιζαν 0,50 € το κιλό. Να βρείτε πόσα χρήματα είχε πριν τις αγορές ο μανάβης.

Προτεινόμενη λύση

Αν x € είναι το ποσό των χρημάτων του μανάβη πριν τις αγορές τότε για τις αγορές

ξοδεύτηκαν $\frac{x}{2}$ €.

Τα χρήματα που πλήρωσε ο μανάβης για την αγορά των προϊόντων είναι $30 \cdot 0,40 + 25 \cdot 0,60 + 15 \cdot 0,50 = 12 + 15 + 7,5 = 34,5$ €

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε $\frac{x}{2} = 34,5$ άρα $x = 2 \cdot 34,5 = 69$

Άρα ο μανάβης είχε 69 €

15.

Μία βρύση γεμίζει μία δεξαμενή σε 12 λεπτά , μία άλλη σε 20 λεπτά και μία τρίτη σε 30 λεπτά. Να βρεθεί σε πόσα λεπτά θα γεμίσει η δεξαμενή αν τρέχουν και οι τρεις βρύσες μαζί.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι η δεξαμενή θα γεμίσει σε x λεπτά.

Η πρώτη βρύση γεμίζει την δεξαμενή σε 12 λεπτά,

οπότε στο 1 λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{12}$ της δεξαμενής και σε x λεπτά γεμίζει τα $\frac{x}{12}$

Ομοίως οι άλλες βρύσες σε x λεπτά γεμίζουν τα $\frac{x}{20}$ και $\frac{x}{30}$ της δεξαμενής αντίστοιχα.

Οπότε σε x λεπτά κάθε μία βρύση γεμίζει τα : $\frac{x}{12} = \frac{5x}{60}$, $\frac{x}{20} = \frac{3x}{60}$, $\frac{x}{30} = \frac{2x}{60}$

της δεξαμενής αντίστοιχα.

Τρέχοντας και οι τρεις μαζί για x λεπτά γεμίζει η δεξαμενή.

Άρα γεμίζουν τα $\frac{60}{60}$ της δεξαμενής.

Επομένως ισχύει ότι
$$\frac{5x}{60} + \frac{3x}{60} + \frac{2x}{60} = \frac{60}{60}$$

$$\frac{5x + 3x + 2x}{60} = \frac{60}{60}$$

$$\frac{10x}{60} = \frac{60}{60} \quad \text{οπότε} \quad 10x = 60 \quad \text{άρα} \quad x = 6$$

Δηλαδή η δεξαμενή θα γεμίσει σε 6 λεπτά.

16.

Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 80cm. Να βρεθούν οι πλευρές του αν κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι κατά 7 cm μεγαλύτερη από την βάση του.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x το μήκος της βάσης. Τότε κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι $x + 7$

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $x + 7 + x + 7 + x = 80$

$$3x + 14 = 80$$

$$3x = 80 - 14$$

$$3x = 66 \quad \text{οπότε} \quad x = 66 : 3 = 22$$

Δηλαδή η βάση είναι 22 cm και κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι $22 + 7 = 29$ cm.

17.

Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μεγαλύτερη ισούται με το τετραπλάσιο της μικρότερης ελαττωμένο κατά 20° να βρεθούν οι δύο γωνίες.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η μικρότερη γωνία τότε η μεγαλύτερη είναι $4x - 20$ και αφού οι γωνίες είναι συμπληρωματικές έχουμε

$$x + 4x - 20 = 90$$

$$5x - 20 = 90$$

$$5x = 90 + 20$$

$$5x = 110 \text{ άρα } x = 110 : 5 = 22$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η μικρότερη γωνία είναι 22° και η μεγαλύτερη $90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$

18.

Σ' ένα τρίγωνο η γωνία \hat{A} είναι 5° μεγαλύτερη της \hat{B} και η \hat{B} είναι τριπλάσια της $\hat{\Gamma}$. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι $\hat{\Gamma} = x$ μοίρες. Τότε $\hat{B} = 3x$ και $\hat{A} = 3x + 5$

Όμως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°

$$\text{Άρα } x + 3x + 3x + 5 = 180$$

$$7x + 5 = 180$$

$$7x = 180 - 5$$

$$7x = 175 \text{ οπότε } x = 175 : 7 = 25 \text{ μοίρες}$$

Επομένως $\hat{\Gamma} = 25^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ και $\hat{A} = 80^\circ$