

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 4^η ΔΕΚΑΔΑ

31.

Δίνονται οι παραστάσεις $A = 5^2 - 4^2 + 3$ και $B = 4 \cdot (2^3 - 5) + 24 : 3$

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των A και B

β) Να αναλυθούν οι αριθμοί A και B σε γινόμενα πρώτων παραγόντων

γ) Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{A}{B}$ μέχρι να γίνει ανάγωγο

δ) Το κλάσμα $\frac{A}{B}$ να μετατραπεί σε ποσοστό %

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = 5^2 - 4^2 + 3 = 25 - 16 + 3 = 12$$

$$B = 4 \cdot (2^3 - 5) + 24 : 3 = 4 \cdot (8 - 5) + 24 : 3 = 4 \cdot 3 + 24 : 3 = 12 + 8 = 20$$

β)

$$A = 12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 \quad \text{και} \quad B = 20 = 5 \cdot 4 = 5 \cdot 2^2$$

γ)

$$\text{ΜΚΔ}(12, 20) = 2^2 = 4 \quad \text{άρα} \quad \frac{A}{B} = \frac{12}{20} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$$

δ)

$$\frac{A}{B} = \frac{12}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

32.

Τα ποσά x και y, του πίνακα είναι ανάλογα.

x	1			4	6	
y		6	4		2	1

α) Να συμπληρώσεις τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς.

β) Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα ποσά x και y.

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\text{Από την 6^η στήλη προκύπτει ότι} \quad \frac{y}{x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{άρα} \quad y = \frac{1}{3}x \quad \text{οπότε} \quad x = 3y$$

$$\text{Αν } x = 1 \text{ τότε } y = \frac{1}{3}, \quad \text{αν } y = 6 \text{ τότε } x = 18$$

$$\text{Αν } y = 4 \text{ τότε } x = 12, \quad \text{αν } x = 4 \text{ τότε } y = \frac{4}{3}, \quad \text{αν } y = 1 \text{ τότε } x = 3$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος

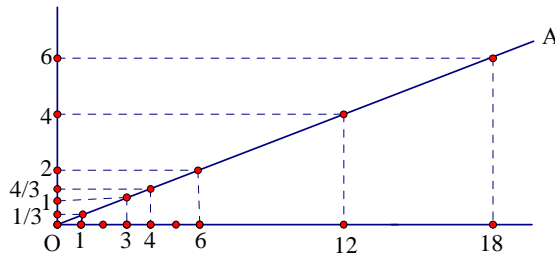
x	1	18	12	4	6	3
y	$\frac{1}{3}$	6	4	$\frac{4}{3}$	2	1

β)

Η γραφική παράσταση αποτελείται από τα σημεία

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), (18, 6), (12, 4),$$

$$\left(4, \frac{4}{3}\right), (6, 2) \text{ και } (3, 1)$$



τα οποία βρίσκονται στην ημιευθεία ΟΑ που βλέπουμε στο δίπλα σχήμα

33.

A. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις

- α. **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές
- β. **Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του
- γ. **Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του
- δ. Το τετράπλευρο του οποίου **μόνο** δυο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται
- ε. Το **τετράγωνο** είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και

B. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις με ένα Σ αν είναι σωστές και με ένα Λ αν είναι λανθασμένες

- α. **Ορθογώνιο** τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο εκείνο που έχει μια ορθή γωνία
- β. **Οξυγώνιο** τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο εκείνο που έχει μια οξεία γωνία
- γ. Ένα **ισοσκελές** τρίγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο
- δ. Το **ισόπλευρο** τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο
- ε. Στο **ισόπλευρο** τρίγωνο, κάθε **διάμεσος** είναι ύψος και διχοτόμος

Προτεινόμενη λύση

A.

Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

- α. **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές **παράλληλες**
- β. **Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του **ορθές**
- γ. **Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του **ίσες**
- δ. Το τετράπλευρο του οποίου **μόνο** δυο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο**
- ε. Το **τετράγωνο** είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και **ρόμβος**

B.

- α. Σωστό
- β. Λάθος αφού το σωστό είναι όλες τις γωνίες οξείες
- γ. Σωστό
- δ. Σωστό
- ε. Σωστό

34.

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (6^2 + 3 \cdot 4 - 47)^{2014} + (3^3 - 3 \cdot 9)^{2015}$$

$$B = (3^2 - 2^3) \cdot 2 + (4 - 5)(-1)$$

$$\Gamma = 8 \cdot (7 - 5) - (2 - 3) - 3 \cdot 4$$

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των A , B και Γ

β) Αν $A = 1$, $B = 3$ και $\Gamma = 5$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $AB + (\Gamma + A) : B$

ii) $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - (\Gamma - A - B)^{1000}$

iii) $4B^2 + (A\Gamma)^2 - A^2B$

Προτεινόμενη Λύση

α)

$$\begin{aligned} A &= (6^2 + 3 \cdot 4 - 47)^{2014} + (3^3 - 3 \cdot 9)^{2015} = (36 + 3 \cdot 4 - 47)^{2014} + (27 - 3 \cdot 9)^{2015} = \\ &= (36 + 12 - 47)^{2014} + (27 - 27)^{2015} = \\ &= 1^{2014} + 0^{2015} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3^2 - 2^3) \cdot 2 + (4 - 5)(-1) = (9 - 8) \cdot 2 + (4 - 5)(-1) = \\ &= 1 \cdot 2 + (-1)(-1) = \\ &= 2 + (+1) = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= 8 \cdot (7 - 5) - (2 - 3) - 3 \cdot 4 = 8 \cdot 2 - (-1) - 3 \cdot 4 = \\ &= 16 - (-1) - 12 = \\ &= 16 + 1 - 12 = 5 \end{aligned}$$

β)

i) $AB + (\Gamma + A) : B = 1 \cdot 3 + (5 + 1) : 3 = 3 + 6 : 3 = 3 + 2 = 5$

ii) $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - (\Gamma - A - B)^{1000} = 1^2 + 3^2 + 5^2 - (5 - 1 - 3)^{1000} =$
 $= 1 + 9 + 25 - 1^{1000} =$
 $= 1 + 9 + 25 - 1 = 34$

iii) $4B^2 + (A\Gamma)^2 - A^2B = 4 \cdot 3^2 + (1 \cdot 5)^2 - 1^2 \cdot 3 =$
 $= 4 \cdot 9 + 5^2 - 1 \cdot 3 =$
 $= 36 + 25 - 3 = 58$

35.

Τρία αδέρφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο Γιώργος πήρε 1800 €, ο Γιάννης πήρε 2200 € και ο Αλέκος πήρε τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων του Γιώργου.

- α) Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο Αλέκος
 β) Να βρείτε ποιο ποσό χρημάτων μοιράστηκαν τα τρία αδέρφια
 γ) Αν τα χρήματα του Γιάννη μειωθούν κατά 25%, πόσα χρήματα θα έχει τώρα ο Γιάννης;
 δ) Αν το ποσό κατά το οποίο μειώθηκαν τα χρήματα του Γιάννη το πάρει ο Αλέκος, να βρείτε το νέο ποσό των χρημάτων του Αλέκου και το ποσοστό που αυτό αντιπροσωπεύει σε σχέση με το συνολικό ποσό που μοιράστηκαν τα αδέρφια .

Προτεινόμενη λύση

α)

Τα χρήματα που πήρε ο Αλέκος είναι $\frac{2}{3} \cdot 1800 = 1200$ €

β)

Το ποσό που μοιράστηκαν ήταν ίσο με $1800 + 2200 + 1200 = 5200$ €

γ)

Η μείωση στα χρήματα του Γιάννη είναι $\frac{25}{100} \cdot 2200 = 550$.

Επομένως το νέο ποσό των χρημάτων του Γιάννη είναι $2200 - 550 = 1650$

δ)

Αν τα 550 € τα πάρει ο Αλέκος, το νέο ποσό των χρημάτων του Αλέκου είναι $1200 + 550 = 1750$ €.

Αυτό το ποσό είναι τα $\frac{1750}{5200} \approx 0,337 = \frac{33,7}{100} = 33,7\%$ του ποσού που μοιράστηκαν τα αδέρφια.

36.

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (3^2 - 4) \cdot 3 - (6^2 : 3) + 2$ και $B = 3 \cdot (3 \cdot 4 + 2^2) - (5^2 - 7^1) : 1^3$

α. Να αποδείξετε ότι $A = 5$ και $B = 30$.

β. Να βρείτε τον ΜΚΔ(A, B) και το ΕΚΠ(A, B), όπου A και B τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α)

γ. Να δείξετε ότι τα ποσά x και y του διπλανού πίνακα είναι ανάλογα και να υπολογίσετε τον συντελεστή αναλογίας, όπου A, B τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α)

x	2	A	10
y	6	15	B

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = (3^2 - 4) \cdot 3 - (6^2 : 3) + 2 = (9 - 4) \cdot 3 - (36 : 3) + 2 = 5 \cdot 3 - 12 + 2 = 15 - 12 + 2 = 5$$

$$B = 3 \cdot (3 \cdot 4 + 2^2) - (5^2 - 7^1) : 1^3 = 3 \cdot (12 + 4) - (25 - 7) : 1 = 3 \cdot 16 - 18 : 1 = 48 - 18 = 30$$

β)

$$A = 5 \text{ και } B = 5 \cdot 6 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \text{ οπότε } \text{ΜΚΔ}(A, B) = 5 \text{ και } \text{ΕΚΠ}(A, B) = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

γ)

Για $A = 5$ και $B = 30$ ο πίνακας γίνεται

x	2	5	10
y	6	15	30

Επειδή $\frac{y}{x} = \frac{6}{2} = 3 = \frac{15}{5} = \frac{30}{10}$ τα ποσά x και y είναι ανάλογα

37.

Δίνονται οι παραστάσεις

$$\alpha = -(-25 + 3) \cdot 2 + 2^3 \cdot 4 + 2^2 \quad \text{και} \quad \beta = 2 \cdot (4 \cdot 5 - 10) - (-12 : 3) + (-1)^{2014}$$

i) Να αποδειχθεί ότι $\alpha = 50$ και $\beta = 25$

ii) Να εξετάσετε χωρίς να εκτελέσετε τις σχετικές διαιρέσεις αν ο αριθμός $\gamma = \alpha + \beta$, όπου α και β τα αποτελέσματα του (i) ερωτήματος, διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 5 δικαιολογώντας την απάντησή σας.

iii) Να αναλύσετε τους αριθμούς α και β σε γινόμενα πρώτων παραγόντων

iv) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|-2\alpha| - |\beta - \alpha| + |\beta|$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} \alpha &= -(-25 + 3) \cdot 2 + 2^3 \cdot 4 + 2^2 = -(-22) \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 4 = \\ &= -(-44) + 2 + 4 = \\ &= 44 + 2 + 4 = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \cdot (4 \cdot 5 - 10) - (-12 : 3) + (-1)^{2014} = 2 \cdot (20 - 10) - (-4) + (+1) = \\ &= 2 \cdot 10 + 4 + 1 = \\ &= 20 + 4 + 1 = 25 \end{aligned}$$

ii)

$$\gamma = \alpha + \beta = 50 + 25 = 75$$

Επειδή ο αριθμός γ τελειώνει σε 5, αυτός διαιρείται με το 5.

Και επειδή το άθροισμα των ψηφίων του είναι 12, το οποίο διαιρείται με το 3, ο γ διαιρείται και με το 3

iii)

$$\alpha = 50 = 2 \cdot 25 = 2 \cdot 5^2 \quad \text{και} \quad \beta = 25 = 5^2$$

iv)

$$\begin{aligned} |-2\alpha| - |\beta - \alpha| + |\beta| &= |-2 \cdot 50| - |25 - 50| + |25| = \\ &= |-100| - |-25| + |25| = \\ &= 100 - 25 + 25 = 100 \end{aligned}$$

38.

Σε ένα κατάστημα ένα ζευγάρι παπούτσια πωλείται 60 €, μία μπλούζα 30 € και ένα παντελόνι 50 €.

Σε έναν πελάτη, ο πωλητής του είπε ότι θα του κάνει έκπτωση 20% στα παπούτσια, 25% στην μπλούζα και 30% στο παντελόνι.

α) Να υπολογίσετε πόσο θα πληρώσει για κάθε είδος ξεχωριστά.

β) Να βρείτε το ποσοστό που αντιπροσωπεύει η συνολική έκπτωση επί του συνόλου της αξίας των τριών ειδών πριν την έκπτωση.

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\text{Η έκπτωση για τα παπούτσια είναι } \frac{20}{100} \cdot 60 = 12 \text{ €}$$

$$\text{Επομένως ο πελάτης θα πληρώσει για τα παπούτσια } 60 - 12 = 48 \text{ €}$$

$$\text{Η έκπτωση για την μπλούζα είναι } \frac{25}{100} \cdot 30 = 7,5 \text{ €}$$

$$\text{Επομένως ο πελάτης θα πληρώσει την μπλούζα } 30 - 7,5 = 22,5 \text{ €}$$

$$\text{Η έκπτωση για το παντελόνι είναι } \frac{30}{100} \cdot 50 = 15 \text{ €}$$

$$\text{Επομένως ο πελάτης θα πληρώσει την μπλούζα } 50 - 15 = 35 \text{ €}$$

β)

Η συνολική αξία πριν την έκπτωση ήταν $60 + 30 + 50 = 140 \text{ €}$,
και η συνολική έκπτωση $12 + 7,5 + 15 = 34,5 \text{ €}$

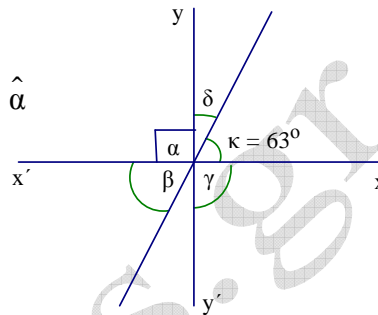
Το ποσό αυτό αντιπροσωπεύει τα $\frac{34,5}{140} \approx 0,246 = \frac{24,6}{100} = 24,6\%$ της αξίας των προϊόντων πριν την έκπτωση.

39.

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες xx' και yy' είναι κάθετες και η γωνία $\hat{\kappa}$ είναι 63° .

α) Να υπολογιστεί το μέτρο των γωνιών $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ και $\hat{\alpha}$

β) Να βρείτε : i) ποια από αυτές τις γωνίες είναι συμπληρωματική της $\hat{\kappa}$
ii) ποιές είναι εφεξής με την $\hat{\alpha}$



Προτεινόμενη λύση

α)

$\hat{\beta} = \hat{\kappa} = 63^\circ$ ως κατακορυφήν.

$\hat{\alpha} = 90^\circ$ και $\hat{\gamma} = 90^\circ$ επειδή οι ευθείες xx' και yy' είναι κάθετες.

$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 90^\circ$

Επειδή $\hat{\delta} + 63^\circ = 90^\circ$ είναι $\hat{\delta} = 27^\circ$

β)

Συμπληρωματική της $\hat{\kappa}$ είναι η $\hat{\delta}$ και εφεξής της $\hat{\alpha}$ είναι η $\hat{\beta}$ και η $\hat{\delta}$

40.

Τρεις τεχνίτες μοιράστηκαν συνολικά 5300 € . Ο πρώτος σαν επικεφαλής του συνεργείου πήρε το 35% του ποσού, ενώ το υπόλοιπο το μοιράστηκαν οι άλλοι δύο ανάλογα με τον αριθμό των ημερών της εργασίας τους.

Αν ο ένας τεχνίτης εργάστηκε έναν μήνα (30 ημέρες) και ο άλλος 35 ημέρες, να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο κάθε τεχνίτης.

Προτεινόμενη λύση

Ο επικεφαλής πήρε $\frac{35}{100} \cdot 5300 = 1855 \text{ €}$.

Το ποσό που μοιράστηκαν οι δύο άλλοι τεχνίτες ήταν $5300 - 1855 = 3445 \text{ €}$

Ο συνολικός χρόνος εργασίας ήταν $30 + 35 = 65$ ημέρες.

Επομένως η εργασία της μιας ημέρας άξιζε $3445 : 65 = 53 \text{ €}$.

Οπότε ο ένας εργάτης πήρε $53 \cdot 30 = 1590 \text{ €}$

και ο άλλος τα υπόλοιπα $3445 - 1590 = 1855$