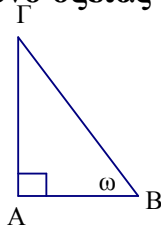


## 2.2 ΗΜΙΤΟΝΟ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

### ΘΕΩΡΙΑ

1.

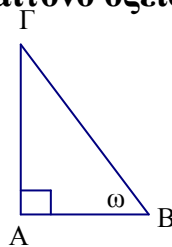
**Ημίτονο οξείας γωνίας :** Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\omega$  μία από τις οξείες γωνίες του. Ονομάζουμε ημίτονο της γωνίας  $\omega$  και συμβολίζουμε με  $\eta\mu\omega$ , το λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.



$$\text{Δηλαδή } \eta\mu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

2.

**Συνημίτονο οξείας γωνίας :** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\omega$  μία από τις οξείες γωνίες του. Ονομάζουμε συνημίτονο της γωνίας  $\omega$  και συμβολίζουμε με  $\sigma\upsilon\nu\omega$ , το λόγο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.



$$\text{Δηλαδή } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{A\text{B}}{B\Gamma}$$

3.

**Περιορισμοί :** Επειδή σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο κάθε μία από τις κάθετες πλευρές είναι μικρότερη από την υποτείνουσα, ισχύει ότι

$$0 < \frac{A\Gamma}{B\Gamma} < 1 \quad \text{και} \quad 0 < \frac{A\text{B}}{B\Gamma} < 1 \quad \text{άρα}$$

$$0 < \eta\mu\omega < 1 \quad \text{και} \quad 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \quad \text{για κάθε οξεία γωνία } \omega$$

4.

**Βασικός τύπος :**  $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

### ΣΧΟΛΙΑ

1.

**Παρατήρηση :** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο γνωρίζοντας μία οξεία γωνία του και μία πλευρά του μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη οξεία γωνία και τις άλλες πλευρές του τριγώνου

2.

**Βασική σχέση :** Αν  $\omega$  και  $\phi$  είναι οι οξείες γωνίες ορθογωνίου, τριγώνου τότε  $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\phi$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\phi$ . Οι ισότητες αυτές ισχύουν για κάθε ζευγάρι συμπληρωματικών γωνιών.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  είναι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου να βρείτε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές

- α)  $\eta\mu\omega \eta\mu\varphi > 0$       β)  $\eta\mu\omega \eta\mu\varphi < 0$       γ)  $\eta\mu\omega + \eta\mu\varphi = 0$   
 δ)  $\epsilon\varphi\omega \sigma\upsilon\nu\omega > 1$       ε)  $0 < \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega < 2$       στ)  $\eta\mu\omega \frac{1}{\epsilon\varphi\omega} < 1$

**Προτεινόμενη λύση**

- α) **Σωστή** αφού  $\eta\mu\omega > 0$  και  $\eta\mu\varphi > 0$   
 β) **Λάθος**  
 γ) **Λάθος**

Θεωρία 3

δ) Είναι  $\epsilon\varphi\omega \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega < 1$ , η σχέση είναι **Λάθος**

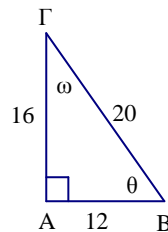
ε) Είναι  $0 < \eta\mu\omega < 1$  και  $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$   
 Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι  $0 < \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega < 2$   
 Οπότε η σχέση είναι **Σωστή**

στ) Είναι  $\eta\mu\omega \frac{1}{\epsilon\varphi\omega} = \eta\mu\omega \frac{1}{\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}} = \sigma\upsilon\nu\omega < 1$ , οπότε η σχέση είναι **Σωστή**

2.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση στον πίνακα με βάση το διπλανό του σχήμα

	A	B	Γ	Δ
$\eta\mu\omega$	$\frac{12}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{12}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{4}$
$\eta\mu\theta$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\sigma\upsilon\nu\theta$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{16}{20}$



**Προτεινόμενη λύση**

$$\eta\mu\omega = \frac{AB}{BG} = \frac{12}{20} \quad \text{συνεπώς σωστό το A}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AG}{BG} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \quad \text{συνεπώς σωστό το B}$$

$$\eta\mu\theta = \frac{AG}{BG} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \quad \text{συνεπώς σωστό το B}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{AB}{BG} = \frac{12}{20} \quad \text{συνεπώς σωστό το B}$$

3.

Αν  $\omega$  είναι οξεία γωνία ορθογώνιου τριγώνου και ισχύουν  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$  να βρείτε πόσο είναι η εφω.

**Προτεινόμενη λύση**

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

Θεωρία 4

4.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να εκφράζουν το ημίτονο ή το συνημίτονο κάποιας οξείας γωνίας ;

$$\frac{6}{10}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 0,12, \quad 1,35, \quad \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \frac{\sqrt{8}}{3}$$

**Προτεινόμενη λύση**

Το  $-\frac{1}{2}$  αφού  $-\frac{1}{2} < 0$

Το  $\frac{5}{4}$  αφού  $\frac{5}{4} > 1$

Το 1,35 αφού  $1,35 > 1$

5.

Αν για μία οξεία γωνία  $\omega$  είναι  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ , να υπολογίσετε το  $\sigma\upsilon\nu\omega$  και την εφω.

**Προτεινόμενη λύση**

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 13 και κάθετη πλευρά ΑΒ = 5

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε  $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - A\beta^2 =$

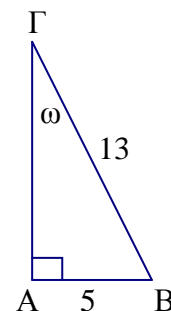
$$= 13^2 - 5^2 =$$

$$= 169 - 25 =$$

$$= 144$$

Άρα  $A\Gamma = 12$

Επομένως  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{12}{13}$  και  $\epsilon\phi\omega = \frac{A\beta}{A\Gamma} = \frac{5}{12}$



**6.**

Να αποδείξετε ότι για κάθε οξεία γωνία  $\omega$  ισχύουν

**α)**  $5 - 3\eta\mu\omega > 2$

**β)**  $6 + 3 \sigma\upsilon\nu\omega < 9$

**γ)**  $7\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega < 11$

**δ)**  $2\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega + 5 < 10$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 0 < \eta\mu\omega < 1 \quad \text{άρα } 0 > -3\eta\mu\omega > -3 \\ 5 > 5 - 3\eta\mu\omega > -3 + 5 \\ 5 > 5 - 3\eta\mu\omega > 2 \\ 5 - 3\eta\mu\omega > 2 \end{aligned}$$

**β)**

$$\begin{aligned} \text{Αρκεί } 6 + 3 \sigma\upsilon\nu\omega < 9 \\ 3\sigma\upsilon\nu\omega < 3 \\ \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \quad \text{που ισχύει} \end{aligned}$$

**γ)**

$$0 < \eta\mu\omega < 1 \quad \text{άρα } 0 < 7\eta\mu\omega < 7 \quad \text{(1)}$$

$$0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \quad \text{άρα } 0 < 4\sigma\upsilon\nu\omega < 4 \quad \text{(2)}$$

$$\text{Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε } 0 < 7\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega < 11 \quad \text{οπότε} \\ 7\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega < 11$$

**δ)**

$$0 < \eta\mu\omega < 1 \quad \text{άρα } 0 < 2\eta\mu\omega < 2 \quad \text{(1)}$$

$$0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \quad \text{άρα } 0 < 3\sigma\upsilon\nu\omega < 3 \quad \text{(2)}$$

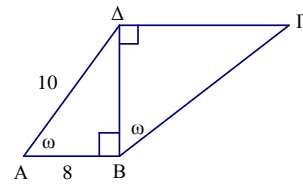
$$\text{Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε } 0 < 2\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega < 5 \quad \text{οπότε} \\ 5 < 2\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega + 5 < 10$$

7.

Με την βοήθεια του διπλανού σχήματος, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΒΔΓ.

**Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο θεώρημα στο } \triangle AB\Delta: \quad \Delta B^2 &= A\Delta^2 - AB^2 = \\ &= 100 - 64 = \\ &= 36 \end{aligned}$$



$$\text{Άρα } \Delta B = 6, \text{ οπότε στο τρίγωνο } AB\Delta \text{ είναι } \eta\mu\omega = \frac{\Delta B}{A\Delta} = \frac{6}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{Στο τρίγωνο } B\Delta\Gamma \text{ είναι } \eta\mu\omega &= \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} \quad \text{άρα} \quad \frac{\Delta B}{A\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} \\ \frac{6}{10} &= \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} \quad \text{οπότε} \quad \Delta\Gamma = \frac{6}{10} B\Gamma \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Πυθαγόρειο στο } B\Delta\Gamma: \quad B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \quad \text{και λόγω της (1)}$$

$$B\Gamma^2 = 6^2 + \frac{36}{100} B\Gamma^2$$

$$B\Gamma^2 - \frac{36}{100} B\Gamma^2 = 36$$

$$\frac{64}{100} B\Gamma^2 = 36$$

$$B\Gamma^2 = \frac{36 \cdot 100}{64} \quad \text{επομένως} \quad B\Gamma = \frac{6 \cdot 10}{8} = 7,5$$

$$\text{Τότε η (1) δίνει} \quad \Delta\Gamma = \frac{6}{10} \cdot 7,5 = 4,5$$

8.

Αν ΑΒΓ οξυγώνιο τρίγωνο, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του Ε δίνεται από τους

$$\text{τύπους} \quad E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta\mu \Gamma = \frac{1}{2} \alpha \gamma \eta\mu B$$

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν Ε του τριγώνου είναι ίσο με

$$E = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta = \frac{1}{2} \beta \cdot B\Delta \quad (1)$$

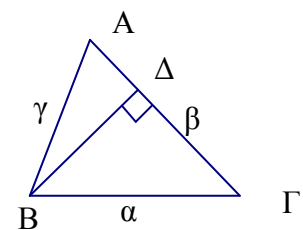
$$\text{Από το ορθογώνιο τρίγωνο } AB\Delta \text{ έχουμε} \quad \eta\mu A = \frac{B\Delta}{AB} \quad \text{άρα}$$

$$\eta\mu A = \frac{B\Delta}{\gamma}$$

$$B\Delta = \gamma \eta\mu A$$

$$\text{Τότε η (1) γίνεται} \quad E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \eta\mu A$$

Ομοίως οι άλλες σχέσεις



9.

Στα διπλανά σχήματα να βρείτε τα  $x$  και  $y$

**Προτεινόμενη λύση**

Στο  $AB\Gamma$  τρίγωνο

$$\eta\mu 58^\circ = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \quad \text{άρα} \quad 0,8480 = \frac{8}{x}$$

$$x = 9,4$$

$$\sigma\upsilon\nu 58^\circ = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{άρα} \quad 0,5299 = \frac{y}{9,4}$$

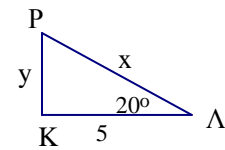
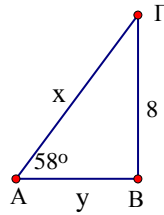
$$y = 4,98$$

Στο  $PK\Lambda$  τρίγωνο  $\sigma\upsilon\nu 20^\circ = \frac{K\Lambda}{P\Lambda} \quad \text{άρα} \quad 0,9397 = \frac{5}{x}$

$$x = 5,3 \quad \text{και}$$

$$\eta\mu 20^\circ = \frac{y}{x} \quad \text{άρα} \quad 0,3420 = \frac{y}{5,3}$$

$$y = 1,8$$



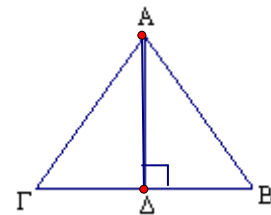
10.

Στο διπλανό ισοσκελές τρίγωνο είναι

$AB = AG = 10\text{m}$  και  $B\Gamma = 12\text{m}$

α) Το  $\sigma\upsilon\nu\Gamma$  είναι  $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{12}, \frac{\sqrt{3}}{2}$  επιλέξτε το σωστό

β) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu\Gamma$  και την  $\epsilon\phi\Gamma$

**Προτεινόμενη λύση**

α)

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος στη βάση είναι και διάμεσος, άρα  $\Gamma\Delta = \Delta B = 6\text{m}$

Πυθαγόρειο στο  $A\Gamma\Delta$ :  $A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 =$

$$= 100 - 36 =$$

$$= 64 \quad \text{οπότε} \quad A\Delta = 8$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

β)

$$\eta\mu\Gamma = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi\Gamma = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

**11.**

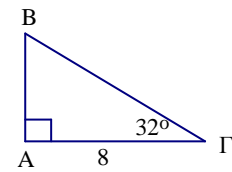
Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να βρείτε την υποτείνουσα και το εμβαδόν χωρίς τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

**Προτεινόμενη λύση**

$$\text{συν}32^\circ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \quad \text{άρα} \quad 0,8480 = \frac{8}{ΒΓ} \quad \text{οπότε} \quad ΒΓ = 9,43$$

$$\eta\mu 32^\circ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \quad \text{άρα} \quad 0,5299 = \frac{ΑΒ}{9,43} \quad \text{οπότε} \quad ΑΒ = 4,99$$

$$E = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{4,99 \cdot 8}{2} = 19,96 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

**12.**

Του διπλανού τριγώνου να βρείτε τις πλευρές και το εμβαδόν.

**Προτεινόμενη λύση**

$$\text{συν}58^\circ = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} \quad \text{άρα} \quad 0,5299 = \frac{3}{ΑΒ} \quad \text{οπότε} \quad ΑΒ = 5,66$$

$$\epsilon\phi 58^\circ = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} \quad \text{άρα} \quad 1,6003 = \frac{ΑΔ}{3} \quad \text{οπότε} \quad ΑΔ = 4,8$$

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο στο } ΑΔΓ: \Delta\Gamma^2 &= ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = \\ &= 8^2 - 4,8^2 = \\ &= 64 - 23,04 = 40,96 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα} \quad \Delta\Gamma = \sqrt{40,96} = 6,4$$

$$ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 3 + 6,4 = 9,4$$

$$E = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{9,4 \cdot 4,8}{2} = 22,56 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

