2.3 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΗΜΙΤΟΝΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μεταβολή του ημιτόνου : Όταν μία οξεία γωνία αυξάνεται , αυξάνεται και το ημίτονο της.
Δηλαδή αν $ω > φ$ τότε $ημω > ημφ$

2.

Μεταβολή του συνημιτόνου : Όταν μία οξεία γωνία αυξάνεται, ελαττώνεται το συνημίτονό της.
Δηλαδή αν $ω > φ$ τότε $συνω < ημφ$

3.

Μεταβολή της εφαπτομένης : Όταν μία οξεία γωνία αυξάνεται, αυξάνεται και η εφαπτομένη της.
Δηλαδή αν $ω > φ$ τότε $εφω > εφφ$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Από ανισότητα τριγωνομετρικών αριθμών σε ανισότητα γωνιών

- Αν $ημω > ημφ$ τότε $ω > φ$
- Αν $συνω > συνφ$ τότε $ω < φ$
- Αν $εφω > εφφ$ τότε $ω > φ$

Σημείωση : οι γωνίες είναι οξείες

2.

Από ισότητα τριγωνομετρικών αριθμών σε ισότητα γωνιών

- Αν $ημω = ημφ$ τότε $ω = φ$
- Αν $συνω = συνφ$ τότε $ω = φ$
- Αν $εφω = εφφ$ τότε $ω = φ$

Σημείωση : οι γωνίες είναι οξείες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Θεωρία 1-2-3

Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς

α) ημ22^o, ημ2^o , ημ80^o , ημ45^o , ημ65^o

β) συν11^o, συν81^o , συν34^o , συν73^o , συν50^o

γ) εφ5^o, εφ45^o , εφ82^o , εφ 25^o, εφ67^o

Προτεινόμενη λύση

α)

ημ2^o< ημ22^o < ημ45^o < ημ65^o < ημ80^o

β)

συν81^o < συν73^o < συν50^o < συν34^o < συν11^o

γ)

εφ5^o < εφ 25^o < εφ45^o < εφ67^o < εφ82^o

2.

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) συν25^o< συν 7^o

β) ημ28^o> ημ35^o

γ) εφ45^o < εφ 56^o

δ) συν 36^o> συν55^o

ε) εφ5^o > εφ 18^o

στ) ημ42^o< ημ 43^o

Προτεινόμενη λύση

α) Σωστό αφού 25^o> 7^o

β) Λάθος αφού 28^o <35^o

γ) Σωστό αφού 45^o < 56^o

δ) Σωστό αφού 36^o < 55^o

ε) Λάθος αφού 5^o <8^o

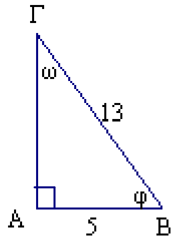
στ) Σωστό αφού 42^o < 43^o

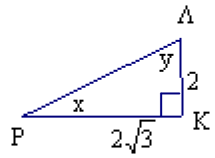
3.

Για τα διπλανά σχήματα επιλέξετε την σωστή απάντηση

α) $\omega < \varphi$, $\omega = \varphi$, $\omega > \varphi$

β) $x = y$, $x > y$, $x < y$





Προτεινόμενη λύση

α)

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΓ : $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

άρα $ΑΓ = \sqrt{144} = 12$

Οπότε $ημφ = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ} = \dfrac{12}{13}$ και $ημω = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{5}{13}$

Αλλά $\dfrac{12}{13} > \dfrac{5}{13}$ άρα $ημφ > ημω$ οπότε $\varphi > \omega$

β)

Στο τρίγωνο ΚΛΡ : $ΛΡ^2 = ΡΚ^2 + ΚΛ^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$

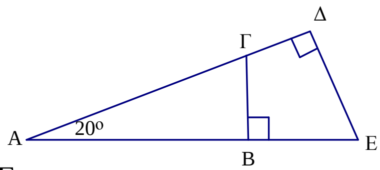
Συνεπώς $ΛΡ = \sqrt{16} = 4$

Οπότε $ημy = \dfrac{ΡΚ}{ΡΛ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$ και $ημx = \dfrac{ΛΚ}{ΡΛ} = \dfrac{2}{4}$

Αλλά $\dfrac{2\sqrt{3}}{4} > \dfrac{2}{4}$ άρα $ημy > ημx$ οπότε $y > x$

4.

Στο διπλανό σχήμα είναι $ΒΓ = 3$, $ΑΕ = 12$.
Να υπολογίσετε τα μήκη ΓΔ , ΑΓ και ΔΕ.



Προτεινόμενη λύση

Στο τρίγωνο ΑΔΕ : $ημ20^o = \dfrac{ΔΕ}{ΑΕ}$ άρα $0,3420 = \dfrac{ΔΕ}{12}$ άρα $ΔΕ = 4,1$

$συν20^o = \dfrac{ΑΔ}{ΑΕ}$ άρα $0,9397 = \dfrac{ΑΔ}{12}$ άρα $ΑΔ = 11,2$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ: $ημ20^o = \dfrac{ΒΓ}{ΑΓ}$ άρα $0,3420 = \dfrac{3}{ΑΓ}$ άρα $ΑΓ = 8,7$

$ΓΔ = ΑΔ - ΑΓ = 11,2 - 8,7 = 2,5$

5.

Αν ω είναι μία οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου δείξτε ότι

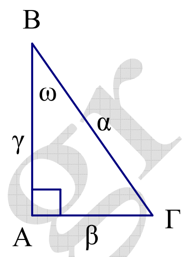
α) εφω συνω = ημω

β) ημω συνω εφω + ημω συνω$\cdot \dfrac{1}{\text{εφω}} = 1$

γ) $\text{συν}^2\text{ω} + \text{ημ}^2\text{ω} + \text{εφ}^2\,\text{ω} = \dfrac{1}{\text{συν}^2\text{ω}}$

δ) $(1-\text{συν}^2\text{ω})(\,1 + \text{εφ}^2\text{ω}\,) = \text{εφ}^2\,\text{ω}$

Προτεινόμενη λύση



Ισχύουν $\text{ημω} = \dfrac{β}{α}$, $\text{συνω} = \dfrac{γ}{α}$, $\text{εφω} = \dfrac{β}{γ}$, $α^2 = β^2 + γ^2$

α)

$$\text{εφω συνω} = \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}\cdot\text{συνω} = \text{ημω}$$

β)

$$\text{ημω συνω εφω} + \text{ημω συνω}\cdot\frac{1}{\text{εφω}} = \text{ημω συνω}\,\frac{\text{ημω}}{\text{συνω}} + \text{ημω συνω}\cdot\frac{1}{\frac{\text{ημω}}{\text{σνω}}} =$$

$$= \text{ημ}^2\text{ω} + \text{συν}^2\,\text{ω} =$$

$$= \left(\frac{β}{α}\right)^2 + \left(\frac{γ}{α}\right)^2 =$$

$$= \frac{β^2}{α^2} + \frac{γ^2}{α^2} =$$

$$= \frac{β^2+γ^2}{α^2} = \frac{α^2}{α^2} = 1$$

γ)

$$\text{συν}^2\text{ω} + \text{ημ}^2\text{ω} + \text{εφ}^2\,\text{ω} = \left(\frac{γ}{α}\right)^2 + \left(\frac{β}{α}\right)^2 + \left(\frac{β}{γ}\right)^2 =$$

$$= \frac{γ^2}{α^2} + \frac{β^2}{α^2} + \frac{β^2}{γ^2} = \frac{β^2+γ^2}{α^2} + \frac{β^2}{γ^2} =$$

$$= \frac{α^2}{α^2} + \frac{α^2-γ^2}{γ^2} =$$

$$= 1 + \frac{α^2}{γ^2} - \frac{γ^2}{γ^2} =$$

$$= 1 + \frac{α^2}{γ^2} - 1 = \frac{1}{\frac{γ^2}{α^2}} = \frac{1}{\left(\frac{γ}{α}\right)^2} = \frac{1}{\text{συν}^2\text{ω}}$$

δ)

$$(1-\text{συν}^2\text{ω})(\,1 + \text{εφ}^2\text{ω}\,) = \left(1-\left(\frac{γ}{α}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{β}{γ}\right)^2\right) =$$

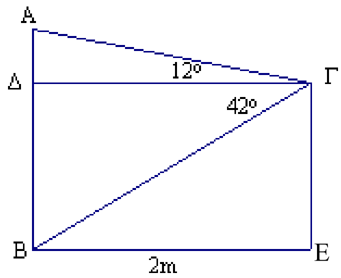
$$= \left(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2}\right) =$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \varepsilon\varphi^2\omega$$

6.

Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ΑΒΕΓ.



Προτεινόμενη λύση

ΔΓ = ΒΕ = 2m

$\varepsilon\varphi 42^o = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$ άρα $0{,}9 = \dfrac{\Delta B}{2}$ οπότε ΔΒ = 1,8 m

$\varepsilon\varphi 12^o = \dfrac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$ άρα $0{,}2126 = \dfrac{\Delta A}{2}$ οπότε ΔΑ = 0,4 m

$\sigma\upsilon\nu 12^o = \dfrac{\Delta\Gamma}{A\Gamma}$ άρα $0{,}9781 = \dfrac{2}{A\Gamma}$ οπότε ΑΓ = 2,04 m

Προφανώς ΓΕ = ΒΔ = 1,8 m

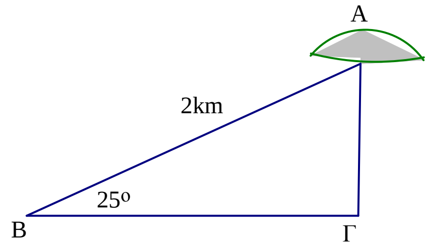
Η περίμετρος Π του τετραπλεύρου είναι Π = ΒΕ + ΒΔ + ΔΑ + ΑΓ + ΓΕ =
= 2 + 1,8 + 0,4 + 2,04 + 1,8 =
= 8,04 m

Το εμβαδόν $E = (A\Delta\Gamma) + (\Delta BE\Gamma) = \dfrac{A\Delta\cdot\Delta\Gamma}{2} + \Delta B\cdot BE =$

$= \dfrac{0{,}4\cdot 2}{2} + 1{,}8\cdot 2 = 4\ m^2$

7.

Το αεροπλάνο Α του διπλανού σχήματος Ανέρχεται, σε σχέση με τον ορίζοντα υπό γωνία 25°.
Να βρείτε το ύψος του αεροπλάνου όταν αυτό έχει διανύσει 2km και την οριζόντια απόστασή του από την πίστα απογείωσης .



Προτεινόμενη λύση

$\eta\mu 25^o = \dfrac{A\Gamma}{AB}$ άρα $0{,}4226 = \dfrac{A\Gamma}{2}$ άρα ΑΓ = 0,845 km

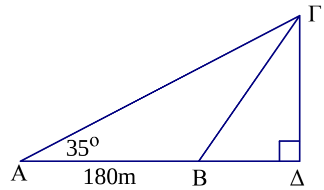
Δηλαδή το ύψος του αεροπλάνου είναι 845m

Για την οριζόντια απόσταση του ΒΓ, είναι $\sigma\upsilon\nu 25^o = \dfrac{B\Gamma}{AB}$ άρα $0{,}9063 = \dfrac{B\Gamma}{2}$

ΒΓ =1,81 km

8.

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΓΔ , ΑΔ και ΑΓ



Προτεινόμενη λύση

Είναι ΓΒ = ΑΒ = 180m και $A\hat{\Gamma}B = 35^o$

Οπότε $A\hat{B}\Gamma = 180^o - 35^o - 35^o = 110^o$

και συνεπώς $\Gamma\hat{B}\Delta = 70^o$.

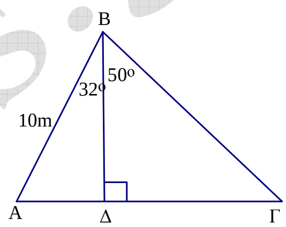
$ημ70^o = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$ άρα $0,9397 = \dfrac{\Delta\Gamma}{180}$ οπότε $\Delta\Gamma = 169,1$ m

$ημ35^o = \dfrac{\Delta\Gamma}{A\Gamma}$ άρα $0,5736 = \dfrac{169,1}{A\Gamma}$ οπότε $A\Gamma = 294,8$ m

$συν35^o = \dfrac{A\Delta}{A\Gamma}$ άρα $0,8192 = \dfrac{A\Delta}{294,8}$ οπότε $A\Delta = 241,5$ m

9.

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Προτεινόμενη λύση

$ημ32^o = \dfrac{A\Delta}{AB}$ άρα $0,5299 = \dfrac{A\Delta}{10}$ άρα $A\Delta = 5,299$ m

$συν32^o = \dfrac{B\Delta}{AB}$ άρα $0,8480 = \dfrac{B\Delta}{10}$ άρα $B\Delta = 8,48$ m

$συν50^o = \dfrac{B\Delta}{B\Gamma}$ άρα $0,6428 = \dfrac{8,48}{B\Gamma}$ άρα $B\Gamma = 13,19$ m

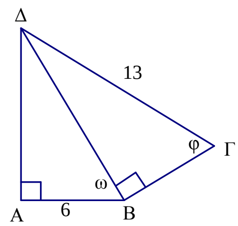
$ημ50^o = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$ άρα $0,7660 = \dfrac{\Delta\Gamma}{13,19}$ άρα $\Delta\Gamma = 10,1$ m

Η περίμετρος Π είναι $\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 10 + 13,19 + 5,299 + 10,1 = 38,589$ m

Το εμβαδόν $E = \dfrac{A\Gamma \cdot B\Delta}{2} = \dfrac{15,399 \cdot 8,48}{2} = 65,29m^2$

10.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσεις τα ημφ , συνφ , εφφ
αν συνω = 0,5 , ΑΒ = 6 και ΔΓ = 13



Προτεινόμενη λύση

$συνω = \dfrac{AB}{\Delta B}$ άρα $0,5 = \dfrac{6}{\Delta B}$ οπότε $\Delta B = 12$

$ημφ = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \dfrac{12}{13}$

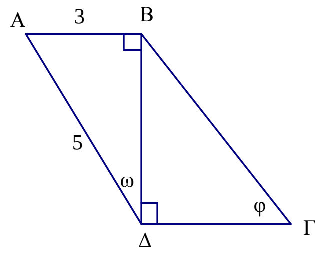
Πυθαγόρειο στο ΒΔΓ : $B\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

άρα $B\Gamma = \sqrt{25} = 5$

$συνφ = \dfrac{\Gamma B}{\Delta\Gamma} = \dfrac{5}{13}$ και $εφφ = \dfrac{\Delta B}{B\Gamma} = \dfrac{12}{5}$

11.

Στο διπλανό σχήμα είναι φ = ω. Να υπολογίσετε το τμήμα ΒΓ



Προτεινόμενη λύση

Πυθαγόρειο στο ΑΒΔ : $ΒΔ^2 = ΑΔ^2 - ΑΒ^2 =$

$= 5^2 - 3^2 = 16$

άρα $ΒΔ = \sqrt{16} = 4$

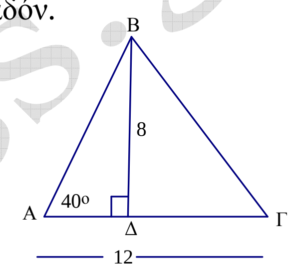
$ημφ = \frac{ΒΔ}{ΒΓ} = \frac{4}{ΒΓ}$ **(1)**

Επειδή φ = ω θα είναι $ημφ = ημω = \frac{3}{5}$

Τότε η (1) γίνεται $\frac{4}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$ οπότε $ΒΓ = \frac{20}{3}$

12 .

Στο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν.



Προτεινόμενη λύση

$ημ40^o = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$ άρα $0{,}6428 = \frac{8}{ΑΒ}$ οπότε ΑΒ = 12,4

$συν40^o = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ άρα $0{,}766 = \frac{ΑΔ}{12{,}4}$ οπότε ΑΔ = 9,49

ΔΓ = ΑΓ – ΑΔ = 12 – 9,49 = 2,51

Πυθαγόρειο στο ΒΔΓ : $ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΔΓ^2 = 8^2 + 2{,}51^2 =$

$= 64 + 6{,}3 = 70{,}3$ οπότε

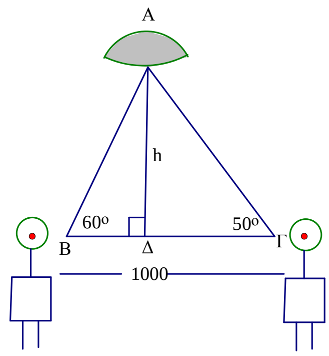
$ΒΓ = \sqrt{70{,}3} = 8{,}38$

Περίμετρος Π = 12,4 + 8,38 + 12 = 32,78

Εμβαδόν $Ε = \frac{ΑΓ \cdot ΒΔ}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2}$ 48 τετραγωνικές μονάδες

13.

Δύο παρατηρητές παρατηρούν από τα σημεία Β και Γ ένα αεροπλάνο υπό γωνίες 60^o και 50^o.
Η απόσταση των παρατηρητών είναι 1000m και το ύψος των ματιών τους, από το οριζόντιο επίπεδο, είναι 1,70m .
Να βρείτε το ύψος του αεροπλάνου και τις αποστάσεις ΑΒ και ΑΓ.



Προτεινόμενη λύση

$εφ60^o = \dfrac{h}{ΒΔ}$ άρα $1,7321 = \dfrac{h}{ΒΔ}$ άρα $ΒΔ = \dfrac{h}{1,7321}$

Ομοίως $ΔΓ = \dfrac{h}{1,1918}$

$ΒΔ + ΔΓ = 1000$ άρα $\dfrac{h}{1,7321} + \dfrac{h}{1,1918} = 1000$

$1,1918h + 1,7321h = 1,7321 \cdot 1,1918 \cdot 1000$

$2,9239h = 2063, 3167$ περίπου. Οπότε

$h = 705, 6$

$ημ60^o = \dfrac{h}{ΑΒ}$ άρα $0,8660 = \dfrac{705,6}{ΑΒ}$ άρα $ΑΒ = 814,78$

$ημ50^o = \dfrac{h}{ΑΓ}$ άρα $0,7660 = \dfrac{705,6}{ΑΓ}$ άρα $ΑΓ = 921,14$

14.

Σε ένα παραλληλόγραμμο, δύο διαδοχικές πλευρές του έχουν μήκη 8,5 m και 6m και σχηματίζουν γωνία 40^o. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

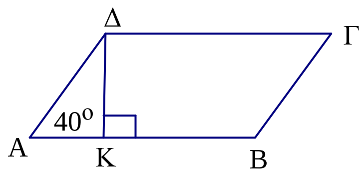
Προτεινόμενη λύση

Έστω ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο με

$ΑΒ = 8,5$ m , $ΑΔ = 6$m και $\widehat{Α} = 40^o$

$ημ40^o = \dfrac{ΔΚ}{ΑΔ}$ άρα $0,6428 = \dfrac{ΔΚ}{6}$ άρα $ΔΚ = 3,85$ m

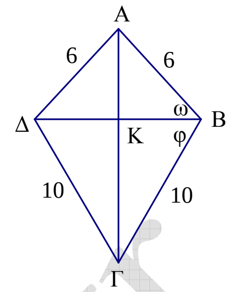
$Ε = ΑΒ \cdot ΔΚ = 8,5 \cdot 3,85 = 32,725$ m^2



15.

Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ , οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα. Αν είναι ΑΒ = ΑΔ = 6 m και ΓΒ = ΓΔ = 10m και ΒΔ = 9m, να υπολογίστε τη γωνία $A\hat{B}\Gamma$ και τη διαγώνιο ΑΓ.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή ΑΒ = ΑΔ = 6 m και ΓΒ = ΓΔ = 10m,
η ΑΓ είναι μεσοκάθετος της ΒΔ.
Επομένως ΔΚ = ΚΒ = 4,5

$\text{συνω} = \frac{BK}{AB} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$ και από τους πίνακες $\hat{\omega} = 41^o$

$\text{συνφ} = \frac{BK}{B\Gamma} = \frac{4{,}5}{10} = 0{,}45$ και από τους πίνακες $\hat{\varphi} = 63^o$

άρα $A\hat{B}\Gamma = \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 104^o$

$\text{ημω} = \frac{AK}{AB}$ άρα $0{,}6561 = \frac{AK}{6}$ άρα ΑΚ = 3,9 m

$\text{ημφ} = \frac{\Gamma K}{\Gamma B}$ άρα $0{,}891 = \frac{\Gamma K}{10}$ άρα ΓΚ = 8,91 m

ΑΓ = ΑΚ + ΚΓ = 3,9 + 8,91 = 12,81 m

16 .

Να προσδιορίσετε τις τιμές των οξειών γωνιών $\hat{\omega}$ για τις οποίες ισχύουν

α) 4ημω = 3 **β)** 5συνω – 2 = 0 **γ)** $\text{εφ}^2\omega = 4$

δ) 5ημω – 4 < 0 **ε)** 4συνω –1 > 0 **στ)** εφω – 4 > 0

Προτεινόμενη λύση

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς πίνακες έχουμε

α)

4ημω = 3 άρα $\text{ημω} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = \text{ημ}49^o$ άρα $\hat{\omega} = 49^o$

Σχόλια 1-2

β)

5συνω – 2 = 0 άρα $\text{συνω} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = \text{συν}66^o$ άρα $\hat{\omega} = 66^o$

γ)

$\text{εφ}^2\omega = 4$ άρα εφω = 2 ή εφω = – 2 άρα $\text{εφω} = 2 = \text{εφ}63^o$ άρα $\omega = 63^o$

Η εξίσωση εφω = – 2 είναι αδύνατη για οξείες γωνίες ω

δ)

5ημω – 4< 0 άρα $\text{ημω} < \frac{4}{5} = 0{,}8 = \text{ημ}53^o$

$\text{ημω} < \text{ημ}53^o$ συνεπώς $0 < \hat{\omega} < 53^o$

ε)

4συνω –1 > 0 άρα $\text{συνω} > \frac{1}{4} = 0{,}25 = \text{συν}74^o$

$\text{συνω} > \text{συν}73^o$ συνεπώς $0 < \omega < 73^o$

στ) εφω – 4 > 0 άρα $\text{εφω} > 4 = \text{εφ}76^o$ συνεπώς $90 > \omega > 76^o$