3.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

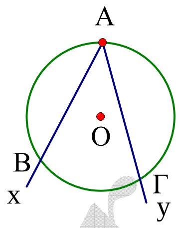
ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εγγεγραμμένη γωνία

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ). Ονομάζουμε εγγεγραμμένη γωνία στον κύκλο κάθε γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Στο σχήμα, η γωνία $x\hat{A}y$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο.



2.

Εγγεγραμμένη γωνία και αντίστοιχο τόξο

Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας $x\hat{A}y$ λέγεται αντίστοιχο τόξο της εγγεγραμμένης γωνίας $B\hat{A}Γ$.

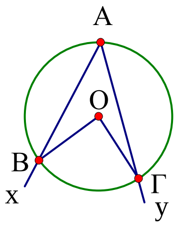
Σε αυτή την περίπτωση επίσης λέμε ότι « η γωνία $B\hat{A}Γ$ **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ »

3.

Εγγεγραμμένη και αντίστοιχη επίκεντρη

Μία εγγεγραμμένη και μία επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο λέγονται αντίστοιχες .

Στο διπλανό σχήμα η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}Γ$ και η επίκεντρη $B\hat{O}Γ$ είναι αντίστοιχες



4.

Σχέση επίκεντρης - εγγεγραμμένης

Η εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης

5.

Γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο

Κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

6.

Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Οι εγγεγραμμέμες γωνίες, που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα, είναι ίσες.

7.

Μέτρο εγγεγραμμένης – αντίστοιχου τόξου

Το μέτρο της εγγεγραμμένης είναι ίσο με το μισό του μέτρου του αντιστοίχου τόξου της.

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Υπενθύμιση : Επίκεντρη γωνία λέμε τη γωνία που η κορυφή της είναι στο κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

2.

Παρατήρηση: Σε ένα συγκεκριμένο τόξο βαίνει μία μόνο επίκεντρη αλλά άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες.

3.

Ειδικά τόξα : Ο κύκλος είναι τόξο 360^o
Το ημικύκλιο είναι τόξο 180^o
Το τεταρτοκύκλιο είναι τόξο 90^o

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

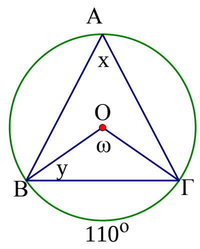
α) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε τεταρτοκύκλιο είναι ορθή Λ
β) Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχά τους τόξα είναι ίσα Λ
γ) Οι εγγεγραμμένες γωνίες σε δύο άνισους κύκλους είναι άνισες Λ
δ) Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της αντίστοιχης εγγεγραμμένης Σ
ε) Δύο εγγεγραμμένες γωνίες στον ίδιο κύκλο έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα Λ
στ) Υπάρχουν άπειρες εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο Σ

Προτεινόμενη λύση

α) Η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή. Άρα η πρόταση είναι λάθος.
β) Πρέπει να είναι στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους. Άρα η πρόταση είναι λάθος.
γ) Μπορεί να είναι και ίσες. Άρα η πρόταση είναι λάθος.
δ) Η εγγεγραμμένη είναι το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης, οπότε η επίκεντρη είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης. Άρα η πρόταση είναι σωστή.
ε) Πρέπει να είναι ίσες για να έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα. Άρα η πρόταση είναι λάθος.
στ) Από τη θεωρία προκύπτει ότι η πρόταση είναι σωστή.

2 .

Με βάση το διπλανό σχήμα, στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση.



α) Η γωνία x είναι

Α. 110^o Β. 220^o Γ. 55^o Δ. τίποτα από αυτά

β) Η γωνία ω είναι

Α. 110^o Β. 220^o Γ. 55^o Δ. τίποτα από αυτά

γ) Η γωνία y είναι

Α. 110^o Β. 220^o Γ. 35^o Δ. τίποτα από αυτά

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 7

α)

Η γωνία x έχει μέτρο το μισό του μέτρου του αντιστοίχου τόξου της.
Άρα $x = 55^o$, οπότε σωστό είναι το Γ.

β)

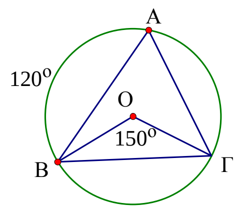
Η γωνία ω, ως επίκεντρη, έχει μέτρο $\omega = 110^o$. Οπότε σωστό είναι το Α

γ)

Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΒ = ΟΓ = ρ. Άρα κάθε μία από της προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίση με $\dfrac{180^o - 110^o}{2} = 35^o$. Οπότε σωστό είναι το Γ.

3.

Με βάση το διπλανό σχήμα, να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία της 1ης γραμμής με το μέτρο της στη 2η γραμμή που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα



$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$	$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$	$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$
75^o	60^o	45^o

Προτεινόμενη λύση

Αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 150^o$, είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \dfrac{150^o}{2} = 75^o$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma} = 150^o$

Συνεπώς $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 360^o - 120^o - 150^o = 90^o$

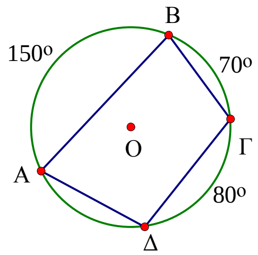
Άρα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$ και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$

Επομένως $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma \rightarrow 75^o$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma \rightarrow 45$ και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} \rightarrow 60^o$

4.

Σε κύκλο θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 150^o$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 70^o$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 80^o$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Προτεινόμενη λύση



Είναι φανερό ότι $\overset{\frown}{A\Delta} = 360^o - 150^o - 70^o - 80^o = 60^o$

Το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$ είναι ίσο με το μισό

του μέτρου του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, άρα $\hat{A} = \dfrac{70^o + 80^o}{2} = 75^o$

Το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ είναι ίσο με το μισό

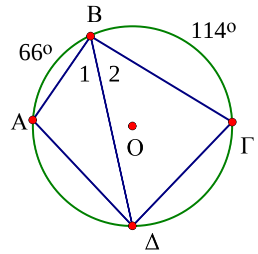
του μέτρου του τόξου $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}$, άρα $\hat{B} = \dfrac{60^o + 80^o}{2} = 70^o$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\hat{\Gamma} = 105^o$ και $\hat{\Delta} = 110^o$

5.

Σε κύκλο παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 66^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 114^o$ και φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$, η οποία τέμνει τον κύκλο στο Δ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ

Προτεινόμενη λύση



Θεωρία 5-7

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 66^o + 114^o = 180^o$

άρα τα τόξα $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}$ είναι ημικύκλια

συνεπώς κάθε μία από τις εγγεγραμμένες σε

αυτά γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι 90^o.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^o$, οπότε

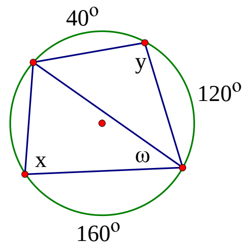
κάθε ένα από τα τόξα $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ είναι 90^o.

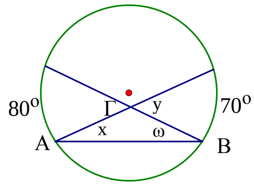
Το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$ είναι ίσο με το μισό

του μέτρου του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, άρα $\hat{A} = \dfrac{114^o + 90^o}{2} = 102^o$

Ομοίως $\hat{\Gamma} = \dfrac{66^o + 90^o}{2} = 78^o$

6.





Στα διπλανά σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω

Προτεινόμενη λύση

Στο πρώτο σχήμα
το τόξο στο οποίο βαίνει η γωνία ω είναι ίσο με

$360^o - 40^o - 120^o - 160^o = 40^o$, άρα $ω = \dfrac{40^o}{2} = 20^o$

$x = \dfrac{40^o + 120^o}{2} = 80^o$ και $y = \dfrac{40^o + 160^o}{2} = 100^o$

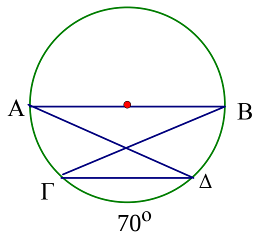
Στο δεύτερο σχήμα

$ω = \dfrac{80^o}{2} = 40^o$, $x = \dfrac{70^o}{2} = 35^o$ και $Α\hat{Γ}Β = 180^o - x - ω =$

$= 180^o - 35^o - 40^o =$
$= 105^o$

Όμως $y = 180^o - Α\hat{Γ}Β$ οπότε $y = 180^o - 105^o = 75^o$

7.



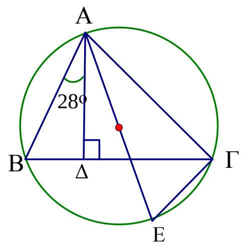
Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος και η χορδή ΓΔ // ΑΒ.
Να υπολογίσετε το μέτρο των τόξων $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και $\overset{\frown}{ΔΒ}$

Προτεινόμενη λύση

$Α\hat{Β}Γ = Β\hat{Γ}Δ$ ως εντός εναλλάξ , άρα $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΔΒ}$ ως αντίστοιχα ίσων εγγεγραμμένων γωνιών.

Όμως $\overset{\frown}{ΑΓΔΒ} = 180^o$, οπότε $\overset{\frown}{ΑΓ} + \overset{\frown}{ΔΒ} = 180^o - 70^o = 110^o$ οπότε $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΔΒ} = 55^o$

8.



Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ. Τι παρατηρείτε;

Προτεινόμενη λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{Δ} = 90^o$
και $Α\hat{Β}Δ = 90^o - 28^o = 62^o$

Επειδή η ΑΕ είναι διάμετρος, είναι $Α\hat{Γ}Ε = 90^o$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο .

Ακόμα $\hat{Β} = \hat{Ε}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$, άρα $\hat{Ε} = 62^o$

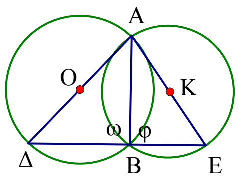
Τέλος από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ έχουμε ότι $Ε\hat{Α}Γ = 90^o - \hat{Ε} =$
$= 90^o - 62^o =$
$= 28^o$

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ισογώνια

9.

Να γράψετε δύο κύκλους κέντρων Ο και Κ που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α να φέρετε τις διαμέτρους ΑΟΔ και ΑΚΕ. Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Δ , Β και Ε είναι στην ίδια ευθεία.

Προτεινόμενη λύση

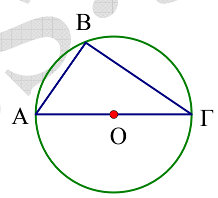


Φέρνουμε την κοινή χορδή ΑΒ των δύο κύκλων
Επειδή ΑΟΔ διάμετρος, η γωνία ω είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, άρα $\omega = 90^o$
Ομοίως $\varphi = 90^o$, συνεπώς $\omega + \varphi = 180^o$
Δηλαδή $\Delta\hat{B}E = 180^o$ οπότε η γραμμή ΔΒΕ είναι ευθεία.

10.

Σε έναν κύκλο (Ο, ρ) να πάρετε δύο διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ έτσι ώστε το $\overset{\frown}{AB}$ να είναι το $\frac{1}{6}$ του κύκλου και το $\overset{\frown}{B\Gamma}$ το $\frac{1}{3}$ του κύκλου. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση



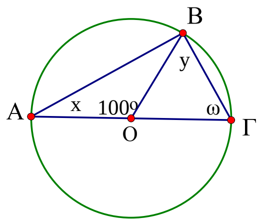
$\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{6}\cdot 360^o = 60^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = \frac{1}{3}\cdot 360^o = 120^o$

Τότε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 360^o - 60^o - 120^o = 180^o$ οπότε

$\hat{B} = \frac{1}{2}\cdot 180^o = 90^o$, $\hat{A} = \frac{1}{2}\cdot 120^o = 60^o$ και $\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot 60^o = 30^o$

11.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω.

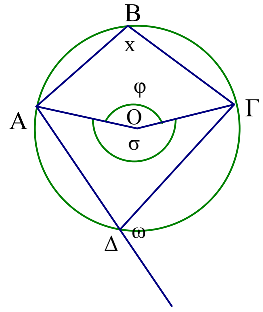


Προτεινόμενη λύση

Είναι $\omega = \frac{1}{2}\cdot 100^o = 50^o$ ως αντίστοιχη εγγεγραμμένη της επίκεντρης γωνίας των 100^o
ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου.
Συνεπώς το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $y = \omega = 50^o$
$B\hat{O}\Gamma = 80^o$ ως παραπληρωματική της γωνίας των 100^o.
Οπότε $x = 40^o$ ως αντίστοιχη εγγεγραμμένη της επίκεντρης των 80^o

12.

Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι $x = \omega$.



Προτεινόμενη λύση

$x = \frac{1}{2}\sigma$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{1}{2}\varphi$

Οπότε $x + A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sigma+\varphi}{2} = \frac{360^o}{2} = 180^o$ **(1)**

Επίσης $\omega + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o$ **(2)**

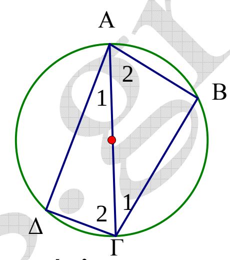
Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $x + A\hat{\Delta}\Gamma = \omega + A\hat{\Delta}\Gamma$ άρα $x = \omega$

13.

Στο διπλανό σχήμα, η ΑΓ είναι διάμετρος με

$A\hat{B}\Gamma = 2x + 10^o$, $\overset{\frown}{AB} = x + 20^o$ και $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = x + 10^o$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



Προτεινόμενη λύση

Η ΑΓ είναι διάμετρος, οπότε $A\hat{B}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο

Συνεπώς $2x + 10^o = 90^o$ άρα $2x = 80^o$ δηλαδή $x = 40^o$.

Τότε $\overset{\frown}{AB} = 60^o$ και $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 50^o$

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\cdot 60^o = 30^o$ και επομένως η τρίτη γωνία $\hat{A}_2$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A}_2 = 60^o$.

Επίσης $\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\cdot 50^o = 25^o$ και επομένως η τρίτη γωνία $\hat{\Gamma}_2$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ είναι $\hat{\Gamma}_2 = 65^o$

Τελικά έχουμε ότι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$,

$\Delta\hat{A}B = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 25^o + 60^o = 85^o$ και

$\Delta\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 30^o + 65^o = 95^o$