3.2 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ονομασία: Ένα πολύγωνο με **ν** κορυφές θα το λέμε **ν-γωνο** με εξαίρεση το πολύγωνο με τέσσερις κορυφές που θα το λέμε τετράπλευρο.

2.

Κανονικό πολύγωνο: Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό όταν όλες οι πλευρές του είναι ίσες και όλες οι γωνίες του ίσες.

3.

Εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο

Από τις κορυφές οποιουδήποτε κανονικού πολυγώνου διέρχεται ένας κύκλος.

Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** στο πολύγωνο, το δε πολύγωνο λέγεται **εγγεγραμμένο** στον κύκλο .
Το κέντρο του κύκλου λέγεται και κέντρο του πολυγώνου.

4.

Κατασκευή κανονικού ν-γώνου

Η κατασκευή ενός κανονικού ν-γώνου ανάγεται στη διαίρεση ενός κύκλου σε **ν ίσα τόξα**.

Κατασκευάζοντας **ν** διαδοχικές επίκεντρες γωνίες , κάθε μία είναι ίση με $\frac{360^{\circ}}{\nu}$, ορίζουμε στον κύκλο **ν** ίσα διαδοχικά τόξα. Φέρνοντας τις χορδές των τόξων αυτών κατασκευάζουμε το κανονικό ν-γωνο.

5.

Κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου

Είναι η επίκεντρη γωνία που έχει πλευρές δύο ακτίνες του περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου με άκρα δύο διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου.

Την κεντρική γωνία την συμβολίζουμε με το ω και είναι ίση με $\omega = \frac{360^{\circ}}{\nu}$

6.

Γωνία κανονικού ν-γώνου

Είναι η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του ν-γώνου και συμβολίζεται με φ.

7.

Σχέση κεντρικής γωνίας και γωνίας ενός κανονικού ν-γώνου

Ισχύει $\omega + \varphi = 180^{\circ}$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Χρήση του τύπου $\omega = \dfrac{360^o}{\nu}$ **:** Στον τύπο υπάρχουν τα στοιχεία ω και ν.

Επομένως όταν γνωρίζω το ένα μπορώ να βρίσκω το άλλο.

2.

Προτεραιότητα : Μεταξύ των ω, φ πρώτα βρίσκω την ω και στη συνέχεια από τον τύπο $\varphi + \omega = 180^o$ βρίσκω την φ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Ο ρόμβος είναι κανονικό πολύγωνο

β) Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία αμβλεία

γ) Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $\varphi = 180^o - \dfrac{360^o}{\nu}$

δ) Το ορθογώνιο είναι κανονικό πολύγωνο

ε) Τα κανονικά πεντάγωνα είναι ίσα

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 2-5

α)

Ο ρόμβος δεν έχει ίσες γωνίες, άρα η πρόταση είναι λάθος Λ

β)

Θα πρέπει να ισχύει $\dfrac{360^o}{\nu} > 90^o$ άρα $\nu < \dfrac{360}{90} = 4$, πράγμα που σημαίνει ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει κεντρική γωνία αμβλεία, οπότε η πρόταση είναι σωστή Σ

γ)

Σχόλιο 2

Είναι $\varphi + \omega = 180^o$ και $\omega = \dfrac{360^o}{\nu}$, συνεπώς $\varphi = 180^o - \dfrac{360^o}{\nu}$

Άρα η πρόταση είναι σωστή Σ

δ)

Το ορθογώνιο δεν έχει ίσες πλευρές, άρα η πρόταση είναι λάθος Λ

ε)

Αυτό συμβαίνει όταν είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους.

Άρα η πρόταση είναι λάθος Λ

2.

Σε ένα κανονικό πολύγωνο η κεντρική του γωνία ω είναι ίση με $\omega = \frac{2}{5}$ της ορθής.

Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου και την γωνία του.

Προτεινόμενη λύση

$\omega = \frac{2}{5} \cdot 90^o = 36^o$

Αν ν είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου, τότε $36 = \frac{360}{\nu}$ άρα

$$\nu = \frac{360}{36} = 10$$

Δηλαδή το πολύγωνο είναι κανονικό δεκάγωνο.
Ακόμα $\varphi + \omega = 180^o$ άρα $\varphi = 180^o - 36^o = 144^o$

3.

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με
α) Κεντρική γωνία $\omega = 22^o$
β) Γωνία $\varphi = 140^o$

Προτεινόμενη λύση

α)

Αν ν είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου, τότε $22 = \frac{360}{\nu}$ άρα

$$\nu = \frac{360}{22} \approx 16{,}3$$

που δεν είναι φυσικός αριθμός.
Άρα δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία 22^o

β)
$\varphi + \omega = 180^o$ οπότε $\omega = 180^o - 140^o = 40^o$

Και $\nu = \frac{360}{40} = 9$

Δηλαδή το κανονικό εννιάγωνο έχει γωνία 140^o

4.

Σε κάθε τιμή της γωνίας φ κανονικού πολυγώνου της $1^{ης}$ γραμμής του παρακάτω πίνακα, αντιστοιχίστε την τιμή της κεντρικής του γωνίας της $2^{ης}$ γραμμής.

φ	120^o	60^o	90^o	144^o	162^o
ω	18^o	90^o	120^o	36^o	60^o

Προτεινόμενη λύση

Με την βοήθεια του τύπου $\varphi + \omega = 180^o$ εύκολα βρίσκουμε ότι
$120^o \rightarrow 60^o$, $60^o \rightarrow 120^o$, $90^o \rightarrow 90^o$, $144^o \rightarrow 36^o$, $162^o \rightarrow 18^o$

5.

Να συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα

Γωνία φ	Κεντρική γωνία ω	Πλήθος πλευρών
165^o	15^o	24
135^o	45^o	8
162^o	18^o	20
140^o	40^o	9
108^o	72^o	5
60^o	120^o	3

Προτεινόμενη λύση

1η γραμμή

$\varphi + \omega = 180^o$ οπότε $\omega = 180^o - 165^o = 15^o$ και $\nu = \frac{360}{15} = 24$

2η γραμμή

$\varphi + \omega = 180^o$ οπότε $\varphi = 180^o - 45^o = 135^o$ και $\nu = \frac{360}{45} = 8$

3η γραμμή

$\omega = \frac{360}{20} = 18^o$ οπότε $\varphi + \omega = 180^o$ άρα $\varphi = 180^o - 18^o = 162^o$

Ομοίως στην **4η γραμμή** βρίσκουμε $\omega = 40^o$ και $\nu = 9$

στην **5η γραμμή** βρίσκουμε $\varphi = 108^o$ και $\nu = 5$

στην **6η γραμμή** βρίσκουμε $\omega = 120^o$ και $\varphi = 60^o$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

6.

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία

Προτεινόμενη λύση

Αν ν είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου τότε $\omega = \frac{360^o}{\nu}$

Και $\varphi + \omega = 180^o$ άρα $\varphi = 180^o - \frac{360^o}{\nu}$

Για να είναι η γωνία οξεία πρέπει $\varphi < 90^o$ άρα

$$180^o - \frac{360^o}{\nu} < 90^o$$

$$\frac{360^o}{\nu} > 90^o$$

$$\nu < \frac{360^o}{90^o} = 4$$

Επομένως το ισόπλευρο τρίγωνο έχει γωνία οξεία

7.

Να κατασκευάσετε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Delta}E$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$

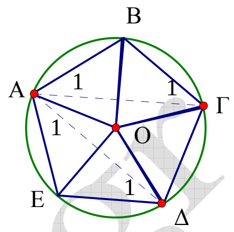
β) Να αποδείξετε ότι κάθε διαγώνιός του είναι παράλληλη σε μία πλευρά του.

Προτεινόμενη λύση

Η κεντρική γωνία ω του κανονικού πενταγώνου είναι $\omega = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$

Κατασκευάζουμε έναν κύκλο κέντρου Ο και στη συνέχεια με κορυφή το Ο πέντε διαδοχικές επίκεντρες γωνίες ίσες με 72^o η κάθε μία.

Αν Α, Β, Γ, Δ, και Ε είναι τα σημεία στα οποία οι πλευρές των γωνιών τέμνουν τον κύκλο, τότε το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ είναι το ζητούμενο κανονικό πεντάγωνο.



α)

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι γωνία του πολυγώνου, οπότε $A\hat{B}\Gamma + \omega = 180^o$ άρα

$$A\hat{B}\Gamma = 180^o - 72^o =$$
$$= 108^o$$

Επειδή ΕΑ = ΕΔ, το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με $A\hat{E}\Delta = 108^o$.

Άρα κάθε μία από τις προσκείμενες στην βάση του γωνίες είναι $\dfrac{180^o - 108^o}{2} = 36^o$

Επομένως $A\hat{\Delta}E = 36^o$

Είναι φανερό ότι $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta - \hat{\Gamma}_1 = 108^o - 36^o = 72^o$

β)

$A\hat{\Gamma}\Delta + E\hat{\Delta}\Gamma = 72^o + 108^o = 180^o$ επομένως ΑΓ // ΕΔ

Το ίδιο για τις υπόλοιπες διαγωνίους

8.

Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με τα $\dfrac{2}{3}$ της γωνίας του.

Να υπολογίσετε το πλήθος των πλευρών του.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $\omega = \dfrac{2}{3}\varphi$ οπότε η σχέση $\omega + \varphi = 180^o$ γίνεται

$$\frac{2}{3}\varphi + \varphi = 180^o$$

$$3\cdot\frac{2}{3}\varphi + 3\varphi = 3\cdot 180^o$$

$$5\varphi = 540^o \text{ συνεπώς } \varphi = 108^o$$

Τότε $\omega = 180^o - 108^o = 72^o$

Και $\nu = \dfrac{360}{72} = 5$

Δηλαδή το πολύγωνο είναι κανονικό πεντάγωνο

9.

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο στο οποίο η κεντρική του γωνία είναι ίση με την γωνία του πολυγώνου.

Προτεινόμενη λύση

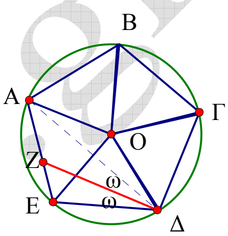
$\omega = \varphi$ και $\omega + \varphi = 180^o$ άρα $2\omega = 180^o$ άρα $\omega = 90^o$ επομένως $\nu = \dfrac{360}{90} = 4$

Πράγμα που σημαίνει ότι στο τετράγωνο η γωνία είναι ίση με την κεντρική του γωνία

10.

Αν ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό πεντάγωνο και ΔΖ διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}$, δείξτε ότι $\Delta Z \perp \Delta\Gamma$.

Προτεινόμενη λύση



Η κεντρική γωνία ω του κανονικού πενταγώνου είναι

$\omega = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$, οπότε η γωνία φ είναι $\varphi = 180^o - 72^o = 108^o$

Επειδή ΕΑ = ΕΔ, το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 108^o$

Άρα κάθε μία από τις προσκείμενες στην βάση του γωνίες είναι $\dfrac{180^o - 108^o}{2} = 36^o$

Επομένως $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 36^o$.

Αλλά ΔΖ διχοτόμος, άρα κάθε μία από τις γωνίες ω είναι 18^o.

Οπότε ΄ $\mathrm{Z}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma - \omega = 108^o - 18^o = 90^o$ άρα $\Delta Z \perp \Delta\Gamma$

11.

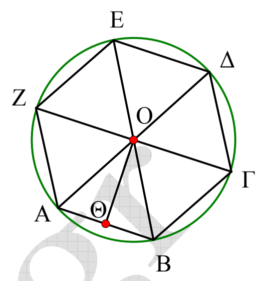
α) Να κατασκευάσετε κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ = 4cm

β) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου

Προτεινόμενη λύση .

α)

Η κεντρική γωνία ω του κανονικού εξαγώνου είναι $\omega = \frac{360^o}{6} = 60^o$



Κατασκευάζουμε έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ = 4 cm, και στη συνέχεια με κορυφή το Ο έξη διαδοχικές επίκεντρες γωνίες 60^o η κάθε μία .
Έστω Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ είναι τα σημεία στα οποία οι πλευρές των γωνιών τέμνουν τον κύκλο.
Τότε το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι το ζητούμενο κανονικό εξάγωνο.

β)

Αφού ΟΑ = ΟΒ, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Και επειδή $A\hat{O}B = 60^o$, η κάθε μία από τις προσκείμενες στην βάση του γωνίες θα είναι επίσης 60^o.
Συνεπώς το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, επομένως ΑΒ = ΟΑ = 4cm
Η περίμετρος Π του κανονικού εξαγώνου είναι Π = 6· 4 = 24 cm
Έστω ΟΘ το ύψος – διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΟΒ, τότε ΘΒ = 2cm .
Από το Πυθαγόρειο στο ΟΘΒ έχουμε ότι $O\Theta^2 = OB^2 - \Theta B^2 =$
$= 4^2 - 2^2 =$
$= 16 - 4 = 12$ άρα $O\Theta = \sqrt{12}$ cm

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(AOB) = \frac{AB \cdot O\Theta}{2} = \frac{4\sqrt{12}}{2} = 2\sqrt{12}\ cm^2$

Επομένως το εμβαδόν Ε του κανονικού εξαγώνου είναι $E = 6\cdot(AOB) = 12\sqrt{12}\ cm^2$