4.3 ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ – ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Όγκος πρίσματος ή κυλίνδρου

Ο όγκος ενός πρίσματος ή ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο
Όγκος = (εμβαδόν βάσης)·(ύψος)

ΣΧΟΛΙΑ

1 .

Όγκος κύβου ακμής α και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α , β , γ

$V_{κύβου} = α^3$ και $V_{ορθ.παρ/δου.} = αβγ$

2.

Υπενθύμιση

Μονάδες μέτρησης όγκου : Βασική μονάδα το **1 κυβικό μέτρο**.
Συμβολίζεται $1m^3$.
Είναι ο όγκος που έχει ένας κύβος ακμής 1m

Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου

- 1 κυβικό δεκατόμετρο ($1dm^3$)

  $1dm^3 = \frac{1}{1000} m^3 = 0{,}001\ m^3$
- 1 κυβικό εκατοστόμετρο ($1cm^3$)

  $1cm^3 = \frac{1}{1000000} m^3 = 0{,}000001\ m^3$
- 1κυβικό χιλιοστόμετρο ($1mm^3$)

  $1mm^3 = \frac{1}{1000000000} m^3 = 0{,}000000001\ m^3$

Για την μέτρηση του όγκου χρησιμοποιείται επίσης το 1λίτρο (1lt **)**
$1\ lt = 1dm^3 = 0{,}001\ m^3$

Το $1cm^3$ το λέμε και χιλιοστόλιτρο (ml)

$1ml = 1cm^3 = 0{,}000001m^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες.

α) Αν σε ένα πρίσμα η βάση μένει σταθερή και διπλασιαστεί το ύψος τότε θα διπλασιαστεί και ο όγκος του.

β) Αν σε ένα τετραγωνικό πρίσμα διπλασιαστεί η πλευρά της βάσης του, αλλά το ύψος μένει σταθερό τότε θα διπλασιαστεί και ο όγκος του.

γ) Αν διπλασιαστεί το ύψος ενός κυλίνδρου και η ακτίνα του μείνει σταθερή, θα διπλασιαστεί και ο όγκος του.

δ) Αν τριπλασιαστεί η ακτίνα ενός κυλίνδρου και το ύψος μείνει σταθερό, τότε θα τριπλασιαστεί και ο όγκος του.

ε) Ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο Όγκος = 2πρ ·(ύψος), όπου ρ η ακτίνα του κυλίνδρου.

Προτεινόμενη λύση

α)

Θεωρία 1

Αν υ είναι το ύψος του πρίσματος, τότε

V = (εμβαδόν βάσης)·(ύψος) = $E_β \cdot υ$

Διπλασιάζοντας το ύψος ο όγκος θα γίνει $V' = E_β \cdot 2υ = 2(E_β \cdot υ) = 2V$

Οπότε η πρόταση είναι σωστή.

β)

Αν α είναι η πλευρά της βάσης και υ το ύψος του πρίσματος, τότε ο όγκος είναι $V = α^2 \cdot υ$.

Διπλασιάζοντας την πλευρά της βάσης ο όγκος θα γίνει $V' = (2α)^2 \cdot υ = 4α^2 υ = 4V$

Οπότε η πρόταση είναι λάθος

γ)

Όπως και στο (α), η πρόταση είναι σωστή.

δ)

Αν ρ η ακτίνα και υ το ύψος τότε $V = πρ^2 υ$

Τριπλασιάζοντας την ακτίνα ο όγκος θα γίνει $V' = π(3ρ)^2 υ = 9πρ^2 υ = 9V$.

Άρα η πρόταση είναι λάθος.

ε)

Λάθος αφού ο όγκος είναι ίσος με $V = πρ^2 υ$

2.

Στον παρακάτω πίνακα τα στοιχεία αναφέρονται σε ένα πρίσμα .
Να τον συμπληρώσετε.

$E_{βάσης}$	$20cm^2$	$15mm^2$	$14dm^2$
Ύψος	4cm	9,6mm	12dm
Όγκος	$80cm^3$	$144mm^3$	$168dm^3$

Θεωρία 1

Προτεινόμενη λύση

Από τον τύπο Όγκος = $E_{βάσης}$ ·ύψος κάνοντας αντικατάσταση των δεδομένων βρίσκουμε τα στοιχεία που λείπουν στον πίνακα και φαίνονται με κόκκινο χρώμα

3.

Στον παρακάτω πίνακα τα στοιχεία αναφέρονται σε έναν κύλινδρο.
Να τον συμπληρώσετε.

$E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}$	20π cm^2	45 dm^2	78,5 mm^2
Ύψος	5 cm	4dm	4 mm
Όγκος	$100\ \pi$ cm^3	180 dm^3	314 mm^3

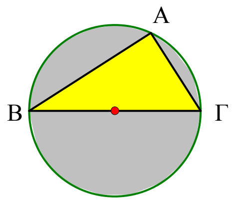
Θεωρία 1

Προτεινόμενη λύση
Από τον τύπο Όγκος = $E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}$ ·ύψος κάνοντας αντικατάσταση των δεδομένων
Βρίσκουμε τα στοιχεία που λείπουν στον πίνακα και φαίνονται με κόκκινο χρώμα

4.

Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = 8 cm , ΑΓ = 6 cm και ΒΓ υποτείνουσα) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Πρίσμα έχει βάση το τρίγωνο και ύψος 20cm. Κύλινδρος έχει βάση τον κύκλο και ύψος 20cm. Να βρείτε
α) την ακτίνα του κυλίνδρου
β) τον όγκο του κυλίνδρου
γ) τον όγκο του πρίσματος
δ) τον όγκο του μέρους του κυλίνδρου που είναι έξω από το πρίσμα

Προτεινόμενη λύση
α)



Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η βάση του κυλίνδρου και του πρίσματος
Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΒΓ, η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 =$
$= 8^2 + 6^2 = 100$
οπότε $ΒΓ = 10$
Επομένως η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι ίση με ρ = 5 cm
β)
Ο όγκος του κυλίνδρου είναι Όγκος = $\pi\rho^2 \upsilon = 3{,}14\cdot 5^2\cdot 20 = 1570$ cm^3
γ)
Το εμβαδό της βάσης του πρίσματος είναι $(ΑΒΓ) = \dfrac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{2} = \dfrac{6\cdot 8}{2} = 24$cm^2
Επομένως ο όγκος του πρίσματος είναι $V_{\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau o\varsigma} = (E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma})\cdot(\text{ύψος}) = 24\cdot 20 = 480$cm^3
δ)
Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με $V_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon} - V_{\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau o\varsigma} = 1570 - 480 = 1090$cm^3

5.

Σε ένα τετραγωνικό πρίσμα το ύψος είναι πενταπλάσιο από την πλευρά της βάσης του και ο όγκος του είναι 135. Να υπολογίσετε την πλευρά της βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

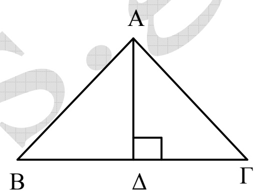
Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η πλευρά της βάσης και $υ$ το ύψος τότε $υ = 5x$.
Ο όγκος V του πρίσματος είναι $V = (E_{βάσης})(ύψος) = x^2 \cdot 5x = 5x^3$
Οπότε $135 = 5x^3$ άρα $x^3 = 27$ συνεπώς $x = 3$ και $υ = 15$
$E_{ολικό} = E_{παράπλευρης} + 2E_{βάσης} = 4\cdot3\cdot15 + 2\cdot3^2 = 180 + 18 = 198$ τετραγωνικές μονάδες

6.

Ένα τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 10cm και ΒΓ= 12cm. Το ύψος του πρίσματος είναι 15cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

Προτεινόμενη λύση



Αν ΑΔ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι
$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 – ΒΔ^2 = 10^2 – 6^2 = 64$ άρα $ΑΔ = 8$
Και συνεπώς το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

$E_{παράπλευρο}$ = (περίμετρος βάσης)(ύψος) = $32\cdot15 = 480\text{cm}^2$
$E_{ολικό} = E_{παράπλευρο} + 2E_{βάσης} = 480 + 2\cdot48 = 576 \text{ cm}^2$
Ο όγκος V του πρίσματος είναι V = (εμβαδό βάσης)·(ύψος) = $48\cdot15 = 720 \text{ cm}^3$

7.

Η παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου είναι $E_π = 602{,}88\text{cm}^2$ και το ύψος του κυλίνδρου είναι 24cm . Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

Προτεινόμενη λύση

$E_π = 2πρυ$ άρα $602{,}88 = 2\cdot3{,}14\cdotρ\cdot24$ απ' όπου $ρ = 4$
Ο όγκος V του κυλίνδρου είναι $V = πρ^2υ = 3{,}14 \cdot4^2\cdot4 = 200{,}96\text{cm}^3$
$E_{ολικό} = E_π + 2 E_β = 602{,}88 + 2\cdot3{,}14\cdot4^2 = 703{,}36\text{cm}^2$

8.

Η ακτίνα της βάσης ενός κυλίνδρου είναι διπλάσια από το ύψος του και η παράπλευρη επιφάνεια αυτού έχει εμβαδόν όσο ένας κύκλος ακτίνας 5cm.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

Προτεινόμενη λύση

Ο κύκλος ακτίνας 5 έχει εμβαδόν $E = π\cdot5^2 = 25π$
Αν $ρ$ είναι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και $υ$ το ύψος του τότε $ρ = 2υ$
και $E_{παράπλευρης} = 2πρυ = 2π\cdot2υ\cdotυ = 4πυ^2$
Η υπόθεση δίνει $4πυ^2 = 25π$ απ' όπου $υ = 2{,}5$ cm και επομένως $ρ = 5$
Ο όγκος V του κυλίνδρου είναι ίσος με $V = πρ^2 υ = 3{,}14\cdot5^2\cdot2{,}5196{,}25 \text{ cm}^3$

9.

Ένα πηγάδι σε σχήμα κυλίνδρου έχει βάθος 10 m και είναι επενδυμένο εσωτερικά με λιθοδομή πάχους 2,5dm. Αν η εσωτερική διάμετρος του πηγαδιού είναι 3m , να υπολογίσετε τον όγκο της λιθοδομής.

Προτεινόμενη λύση

2,5dm = 0,25m

Η εξωτερική διάμετρος του πηγαδιού είναι $3 + 2\cdot 0,25 = 3,5$m, οπότε η εξωτερική ακτίνα είναι 3,5:2 = 1,75

Ο όγκος του πηγαδιού μαζί με την λιθοδομή είναι $V = 3,14\cdot 1,75^2\cdot 10 = 96,1625$ m^3

Ο όγκος V΄ του κενού τμήματος του πηγαδιού (αφού η εσωτερική ακτίνα είναι 1,5) είναι $V' = 3,14\cdot 1,5^2\cdot 10 = 70,65$ m^3

Ο όγκος της λιθοδομής είναι $V - V' = 96,1625 - 70,65 = 25,5125$ m^3

10.

Μία αντλία αντλεί 800 λίτρα νερό το λεπτό. Ένα υπόγειο με δάπεδο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκους 10 m και πλάτους 3,50 m έχει πλημυρίσει με νερό το οποίο έχει φτάσει σε ύψος 1,80 m. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί να αδειάσει η αντλία το νερό ;

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

Ο όγκος του νερού στο υπόγειο είναι $V_{νερού} = 10\cdot 3,50\cdot 1,80 = 63$ m^3 =
= $63\cdot 1000 = 63000$ λίτρα

Ο χρόνος που θα χρειαστεί για να αδειάσει το υπόγειο από το νερό είναι 63000:800 = 78,75 λεπτά

11.

Σε μία αποθήκη σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 10m , 8m και 3 m υπάρχουν 6 κυλινδρικά δοχεία ύψους 2,4m και διαμέτρου βάσης 1,4 m το καθένα. Να υπολογίσετε τον όγκο του μέρους της αποθήκης που μένει ελεύθερος

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

Ο όγκος V της αποθήκης είναι $V = 10\cdot 8\cdot 3 = 240$m^3

Ο όγκος συνολικά των 6 κυλινδρικών δοχείων είναι

$V_δ = 6\cdot 3,14\cdot 0,7^2\cdot 2,4 = 22,15584$ m^3

Ο όγκος της αποθήκης που μένει ελεύθερος είναι ίσος με

$V_{ελ} = 240 - 22,15584 = 217,84416$m^3

12.

Θα φτιάξουμε μία αίθουσα μήκους 20m και πλάτους 8m για 25 μαθητές. Τα έπιπλα καταλαμβάνουν το $\frac{1}{11}$ του χώρου της αίθουσας. Πόσο πρέπει να είναι το ύψος της αίθουσας ώστε σε κάθε μαθητή να αντιστοιχούν 20 m^3 αέρα;

Προτεινόμενη λύση

Οι 25 μαθητές χρειάζονται $25 \cdot 20 = 500 m^3$ αέρα.

Αφού το $\frac{1}{11}$ της αίθουσας καταλαμβάνεται από τα έπιπλα , τα 500 m^3 αέρα αντιστοιχούν στα $\frac{10}{11}$ του όγκου της αίθουσας .

Αν V λοιπόν είναι ο όγκος της αίθουσας, τότε $\frac{10}{11} \cdot V = 500$ άρα

$$V = 500 : \frac{10}{11} = 500 \cdot \frac{11}{10} = 550 m^3$$

Ο όγκος της αίθουσας είναι V = (Εμβαδόν βάσης)·(ύψος).
Οπότε, αν υ είναι το ύψος της αίθουσας, πρέπει να ισχύει
550 = (Εμβαδόν βάσης)(ύψος) άρα $550 = 20 \cdot 8 \cdot υ$ άρα

$$υ = \frac{550}{20 \cdot 8} = 3{,}44 \text{ περίπου}$$