1.6 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

Πρόταση : Σε δύο όμοια πολύγωνα, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

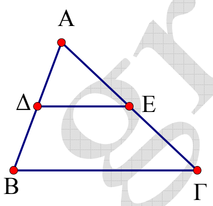
1.

Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = 2ΑΔ και ΔΕ // ΒΓ και (ΑΒΓ) = 16.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια

β) Βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΕ

γ) Βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΔΕΓ



Προτεινόμενη λύση

α)

ΔΕ // ΒΓ άρα $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως εντός εκτός επί τα αυτά

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{B} = \hat{\Delta}$ και την $\hat{A}$ κοινή άρα είναι όμοια.

β)

ΑΒ = 2ΑΔ άρα $\frac{AB}{A\Delta} = 2$ και αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

θα είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = 2^2 = 4$ άρα $\frac{16}{(A\Delta E)} = 4$ συνεπώς $(A\Delta E) = 4$

γ)

$(B\Delta E\Gamma) = (AB\Gamma) - (A\Delta E) = 16 - 4 = 12$ τετραγωνικές μονάδες

2.

Η πλευρά ενός τετραγώνου μειώθηκε κατά 15% πόσο μειώθηκε το εμβαδόν του

Προτεινόμενη λύση

Αν α είναι η πλευρά του αρχικού τετραγώνου, μετά την μείωση κατά 15% η νέα πλευρά α΄ θα είναι ίση με $\alpha' = 85\%\,\alpha = \frac{85}{100}\alpha = \frac{17}{20}\alpha$

και επειδή τα τετράγωνα είναι όμοια, ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{17}{20}$

Κατά συνέπεια $\frac{E'}{E} = \left(\frac{17}{20}\right)^2 = \frac{289}{400}$ άρα $E' = \frac{289}{400}E$

Δηλαδή το αρχικό εμβαδό μειώθηκε κατά $\frac{111}{400} = 0{,}2775 = 27{,}75\ \%$

3.
Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10 cm ,και εμβαδόν Ε. Να βρείτε την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου με εμβαδόν $E' = 4^{E}$.

Προτεινόμενη λύση

Επειδή τα ισόπλευρα τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες, είναι όμοια .
Αν α΄ είναι η πλευρά του νέου τριγώνου, τότε λόγος ομοιότητας του αρχικού προς το νέο είναι $\dfrac{10}{\alpha'}$

Οπότε $\dfrac{E}{E'} = \left(\dfrac{10}{\alpha'}\right)^2$ άρα $\dfrac{E}{4E} = \dfrac{100}{\alpha'^2}$

$$\frac{1}{4} = \frac{100}{\alpha'^2}$$

$\alpha'^2 = 400$ οπότε $\alpha' = 20$ cm

4.
Οι διαστάσεις ορθογωνίου αυξήθηκαν κατά 10% . Πόσο αυξήθηκε το εμβαδόν του ;

Προτεινόμενη λύση

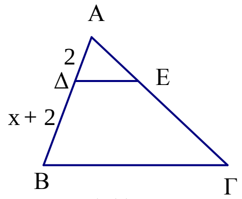
Αν α , β είναι οι αρχικές διαστάσεις μετά την αύξηση κατά 10% θα γίνουν
$\alpha' = 110\%\ \alpha$ και $\beta' = 110\%\ \beta$ οπότε $\dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{110}{100} = \dfrac{\beta'}{\beta}$

Επομένως τα δύο ορθογώνια είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \dfrac{110}{100} = 1{,}1$

Τότε $\dfrac{E'}{E} = 1{,}1^2 = 1{,}21$ άρα $E' = 1{,}21\ E$ πράγμα που σημαίνει ότι το εμβαδόν αυξήθηκε κατά $0{,}21 = 21\%$

5.

Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ , ΑΔ = 2 , ΔΒ = x + 2 και $\dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{1}{9}$. Να βρείτε το x



Προτεινόμενη λύση

Αφού ΔΕ // ΒΓ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια (άσκηση (1))

με λόγο ομοιότητας $\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \dfrac{2}{x+2+2} = \dfrac{2}{x+4}$.

Οπότε $\dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\dfrac{2}{x+4}\right)^2$

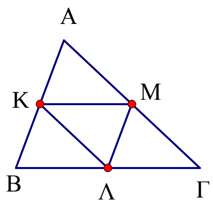
Όμως $\dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{1}{9}$ άρα $\dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{2}{x+4}\right)^2$

$$\frac{2}{x+4} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{x+4} = -\frac{1}{3}$$

- Όταν $\dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{3}$ τότε $6 = x + 4$ επομένως $x = 2$
- Όταν $\dfrac{2}{x+4} = -\dfrac{1}{3}$ τότε $-6 = x + 4$ επομένως $x = -10$ απορρίπτεται αφού πρέπει $x + 2 > 0$

6.

Στο διπλανό σχήμα τα Κ , Λ , Μ είναι τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ αντίστοιχα. Να βρείτε το λόγο $\dfrac{(\text{ΚΛΜ})}{(\text{ΑΒΓ})}$



Προτεινόμενη λύση

Αφού Κ , Μ μέσα των ΑΒ και ΑΓ είναι ΚΜ // ΒΓ και $\text{ΚΜ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΜ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\dfrac{\text{ΚΜ}}{\text{ΒΓ}} = \dfrac{1}{2}$

Επομένως $\dfrac{(\text{ΑΚΜ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ άρα $(\text{ΑΚΜ}) = \dfrac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$

Ομοίως $(\text{ΒΚΛ}) = \dfrac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$ και $(\text{ΜΛΓ}) = \dfrac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$

Συνεπώς το (ΚΛΜ) είναι το υπόλοιπο $\dfrac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$, επομένως $\dfrac{(\text{ΚΛΜ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{1}{4}$

7.
Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα την ΒΓ και κάθετες πλευρές ΑΒ = 1 και ΑΓ = 3. Αν για κάποιο άλλο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ , $\hat{E} = 90^o$ όμοιο του ΑΒΓ ισχύει (ΔΕΖ) = 10(ΑΒΓ), να βρείτε τις κάθετες πλευρές του ΔΕΖ .

Προτεινόμενη λύση

Έστω ΔΕ , ΕΖ είναι οι ομόλογες πλευρές των ΑΒ , ΑΓ και λ ο λόγος ομοιότητας.

Τότε $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{EZ}{A\Gamma} = \lambda$ άρα $\frac{\Delta E}{1} = \frac{EZ}{3} = \lambda$ **(1)** και $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = 10$

Λόγω της ομοιότητας θα είναι $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2$ άρα $\lambda^2 = 10$ δηλαδή $\lambda = \sqrt{10}$

Οι (1) δίνουν $\Delta E = \sqrt{10}$ και $EZ = 3\sqrt{10}$

8.
Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α = 8 , β = 12 και εμβαδόν Ε .
Ένα άλλο ορθογώνιο όμοιο με το πρώτο έχει εμβαδόν 4^E .
Να βρείτε τις διαστάσεις του

Προτεινόμενη λύση

Αν α΄, β΄ είναι οι ομόλογες διαστάσεις των α , β και Ε΄ το εμβαδόν του δεύτερου ορθογωνίου, τότε ό λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$

$$\lambda = \frac{8}{\alpha'} = \frac{12}{\beta'} \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $\lambda^2 = \frac{E}{E'} = \frac{E}{4E} = \frac{1}{4}$ άρα $\lambda = \frac{1}{2}$

Από τις (1) έχουμε $\frac{1}{2} = \frac{8}{\alpha'}$ και $\frac{1}{2} = \frac{12}{\beta'}$ άρα

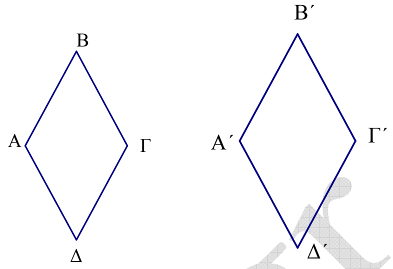
$\alpha' = 16$ και $\beta' = 24$

9.

Δύο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν $\widehat{A} = \widehat{A'}$ και $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{4}{5}$.

Να βρείτε το λόγο $\dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')}$

Προτεινόμενη λύση



Είναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$ και $\widehat{A'} + \widehat{B'} = 180^o$

Οπότε , αφού $\widehat{A} = \widehat{A'}$ θα είναι και $\widehat{B} = \widehat{B'}$

οπότε και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = \widehat{A'} = \widehat{\Gamma'}$

και $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = \widehat{B'} = \widehat{B'}$

Ακόμα είναι $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{\Delta A}{\Delta' A'}$

Συνεπώς οι ρόμβοι είναι όμοιοι , οπότε $\dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$

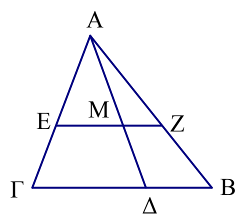
10.

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν 75 cm^2. Έστω σημείο Δ της ΒΓ και Μ σημείο του τμήματος ΑΔ έτσι ώστε $\dfrac{AM}{M\Delta} = \dfrac{3}{2}$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΖΕΓ .

Προτεινόμενη λύση

Επειδή ΕΖ // ΒΓ τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια (άσκηση 1) με λόγο ομοιότητας $\lambda = \dfrac{AE}{A\Gamma}$



Επίσης τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΑΓΔ είναι όμοια ,

άρα είναι $\lambda = \dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{AM}{A\Delta}$ **(1)**

Όμως $\dfrac{AM}{M\Delta} = \dfrac{3}{2}$ άρα $2AM = 3M\Delta$

$$2AM = 3(A\Delta - AM)$$
$$2AM = 3A\Delta - 3AM$$
$$5AM = 3A\Delta \quad \text{άρα} \quad \frac{AM}{A\Delta} = \frac{3}{5}$$

Η (1) δίνει $\lambda = \dfrac{3}{5}$

Είναι $\dfrac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$ άρα $(AEZ) = \dfrac{9}{25}(AB\Gamma) = \dfrac{9}{25} \cdot 75 = 27$

Οπότε $(BZE\Gamma) = (AB\Gamma) - (AEZ) = 75 - 27 = 48$ cm^2