

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 4^η ΔΕΚΑΔΑ

31.

Μία κυλινδρική δεξαμενή έχει μήκος βάσης 12,56 m. Η δεξαμενή είναι γεμάτη κατά τα $\frac{6}{7}$ και περιέχει 75,36 m³ νερό.

- α) Να υπολογίσετε το βάθος της δεξαμενής.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} \text{Αν } \rho \text{ είναι η ακτίνα της βάσης, τότε μήκος βάσης} &= 12,56 \quad \text{άρα } 2\pi\rho = 12,56 \\ 2 \cdot 3,14 \cdot \rho &= 12,56 \\ 6,28\rho &= 12,56 \\ \rho &= 12,56 : 6,28 = 2\text{m} \end{aligned}$$

Αν V είναι όγκος της δεξαμενής, τότε από την υπόθεση είναι $\frac{6}{7}V = 75,36$ άρα

$$\begin{aligned} V &= 75,36 : \frac{6}{7} = \\ &= 75,36 \cdot \frac{7}{6} = \\ &= 87,92 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από τον τύπο } V &= \pi\rho^2 \cdot \upsilon \text{ έχουμε } 87,92 = 3,14 \cdot 2^2 \cdot \upsilon \\ 87,92 &= 12,56 \upsilon \\ \upsilon &= 87,92 : 12,56 = 7 \end{aligned}$$

Συνεπώς το βάθος της δεξαμενής είναι 7 m

β)

$$E_{\text{παράπλευρο}} = 2\pi\rho\upsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 7 = 87,92 \text{ m}^2$$

32.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ η οποία είναι παράλληλη στην $\epsilon : y = 2x - 6$ και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $\Delta(0, -1)$.
- β) Να κάνετε την γραφική παράσταση των ευθειών δ και ϵ .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία τομής των ευθειών δ και ϵ με τους άξονες.

Προτεινόμενη λύση

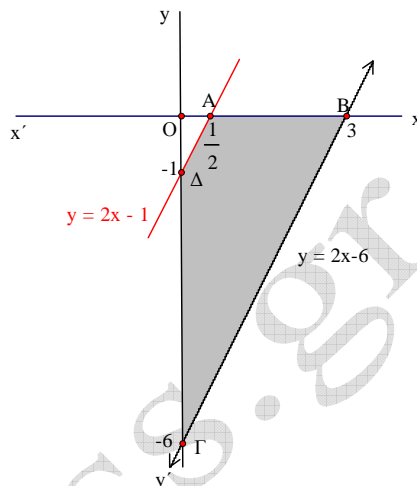
α)

Αν $y = ax + \beta$ είναι η ζητούμενη εξίσωση, με βάση τα δεδομένα είναι $a = 2$ και $\beta = -1$. Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x - 1$

β)

Με τη βοήθεια των πινάκων τιμών

$y = 2x - 6$	x	0	3
	y	-6	0
$y = 2x - 1$	x	0	1/2
	y	-1	0



η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα

γ)

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του τριγώνου $OB\Gamma$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta\Delta$.

$$(OB\Gamma) = \frac{1}{2} OB \cdot O\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

$$(O\Delta\Delta) = \frac{1}{2} OA \cdot O\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

$$\text{Οπότε } E_{\text{ζητούμενο}} = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

33.

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{8} - \frac{2x+1}{72} + \frac{x+1}{3} = \frac{3x-1}{6} - \frac{15+7x}{24}$

β) Να δείξετε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{20} < \frac{x-15}{5} + \frac{5}{2} + (x+4)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{x}{8} - \frac{2x+1}{72} + \frac{x+1}{3} = \frac{3x-1}{6} - \frac{15+7x}{24}$$

$$72 \cdot \frac{x}{8} - 72 \cdot \frac{2x+1}{72} + 72 \cdot \frac{x+1}{3} = 72 \cdot \frac{3x-1}{6} - 72 \cdot \frac{15+7x}{24}$$

$$9x - (2x+1) + 24(x+1) = 12(3x-1) - 3(15+7x)$$

$$9x - 2x - 1 + 24x + 24 = 36x - 12 - 45 - 21x$$

$$16x = -80 \quad \text{άρα} \quad x = -5$$

β)

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{20} < \frac{x-15}{5} + \frac{5}{2} + (x+4)$$

$$20 \cdot \frac{x-1}{2} - 20 \cdot \frac{x+1}{20} < 20 \cdot \frac{x-15}{5} + 20 \cdot \frac{5}{2} + 20 \cdot (x+4)$$

$$10(x-1) - (x+1) < 4(x-15) + 50 + 20(x+4)$$

$$10x - 10 - x - 1 < 4x - 60 + 50 + 20x + 80$$

$$-15x < 81 \quad \text{άρα} \quad x > -\frac{81}{15}$$

Επειδή $-5 > -\frac{81}{15}$ πράγματι η λύση της εξίσωσης ανήκει στο σύνολο λύσεων

της ανίσωσης

34.

Μία αποθήκη έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος $a = 10\text{m}$, πλάτος $\beta = 8\text{m}$ και ύψος $\gamma = 5\text{m}$ και είναι γεμάτη κατά το $\frac{1}{5}$ αυτής με 6 τόνους σιτάρι.

α) Να βρείτε πόσα σακιά σιτάρι των 60 κιλών το καθένα απαιτούνται ακόμα για να γεμίσει η αποθήκη.

β) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της αποθήκης.

Προτεινόμενη λύση

α)

Ο όγκος της αποθήκης είναι $V = a \cdot \beta \cdot \gamma = 10 \cdot 8 \cdot 5 = 400\text{m}^3$

Το $\frac{1}{5}$ του όγκου είναι $\frac{1}{5} \cdot 400 = 80\text{m}^3$ και επομένως τα $400 - 80 = 320\text{m}^3$ είναι

άδεια.

Από την υπόθεση, στα 80m^3 υπάρχουν 6 τόνοι, δηλαδή 6000 κιλά σιτάρι.

Άρα στο 1m^3 θα υπάρχουν $6000 : 80 = 75$ κιλά σιτάρι

Για να γεμίσουμε επομένως τα 320m^3 , χρειαζόμαστε $320 \cdot 75 = 24000$ κιλά σιτάρι, το οποίο χωράει σε $24000 : 60 = 400$ σακιά

β)

Το εμβαδόν E της ολικής επιφάνειας της αποθήκης είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών: δύο ορθογωνίων με διαστάσεις 10m και 8m,

δύο ορθογωνίων με διαστάσεις 8m και 5m και

δύο ορθογωνίων με διαστάσεις 10m και 5m

Δηλαδή $E = 2(10 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 5) = 2(80 + 40 + 50) = 2 \cdot 170 = 340\text{m}^2$

35.

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 60 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 24 \text{ cm}$ και μη παράλληλες πλευρές $A\Delta = B\Gamma = 30 \text{ cm}$

α) Να βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπέζιου.

β) Αν το εμβαδόν του τραπέζιου είναι 1008 cm^2 και ένα ορθογώνιο με μήκος 72 m έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τραπέζιου, να βρείτε το πλάτος του ορθογωνίου

Προτεινόμενη λύση

α)

Φέρνουμε τα ύψη ΔZ και ΓE του τραπέζιου.

Τότε το $\Delta\Gamma E Z$ είναι ορθογώνιο, οπότε $Z E = \Delta\Gamma$

και επειδή τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma E B$ είναι

ίσα θα είναι $AZ = EB$

Όμως $AZ + EB = AB - ZE$ άρα $AZ + AZ = AB - \Delta\Gamma$

$$2AZ = 60 - 24 \text{ οπότε}$$

$$2AZ = 36$$

$$AZ = 18$$

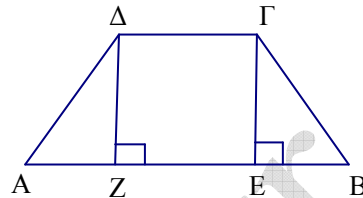
Πυθαγόρειο στο τρίγωνο $A\Delta Z$: $\Delta Z^2 = A\Delta^2 - AZ^2 = 30^2 - 18^2 = 900 - 324 = 576$

$$\text{άρα } \Delta Z = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

$$\text{Εμβαδόν του τραπέζιου } (AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Delta\Gamma)\Delta Z}{2} = \frac{(60 + 24)24}{2} = 1008 \text{ cm}^2$$

β)

Αν x είναι το πλάτος του ορθογωνίου τότε $72x = 1008$ άρα $x = 14 \text{ cm}$



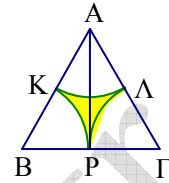
36.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς $a = 12\text{cm}$. Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα 6cm γράφουμε στο εσωτερικό του τριγώνου τόξα κύκλων που τέμνουν την AB στο K , την $A\Gamma$ στο Λ και την $B\Gamma$ στο P .

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου (δίνεται ότι $\sqrt{108} \approx 10,39$)
 β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τα τόξα $\widehat{K\Lambda}$, $\widehat{\Lambda P}$ και \widehat{KP} .

Προτεινόμενη λύση

Το σχήμα του προβλήματος φέρνοντας και το ύψος AP του ισοπλεύρου τριγώνου φαίνεται δίπλα



α)

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο στο } APB: \quad AP^2 &= AB^2 - BP^2 = \\ &= 12^2 - 6^2 = \\ &= 144 - 36 = 108 \\ \text{άρα } AP &= \sqrt{108} \approx 10,39\text{cm} \end{aligned}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AP = \frac{1}{2} 12 \cdot 10,39 = 62,34\text{cm}^2$$

β)

Τα τόξα $\widehat{K\Lambda}$, $\widehat{\Lambda P}$ και \widehat{KP} είναι ίσα, δεδομένου ότι ανήκουν σε ίσους κύκλους και οι γωνίες τους είναι 60° η κάθε μία ως γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου.

$$\begin{aligned} \text{Η ζητούμενη περίμετρος } \Pi \text{ είναι ίση με } \Pi &= 3 \ell_{\widehat{KP}} = 3 \cdot 2\pi r \frac{\mu}{360} = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot \frac{60}{360} = 18,84\text{cm} \end{aligned}$$

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τριών κυκλικών τομέων οι οποίοι βέβαια είναι ίσοι μεταξύ τους.

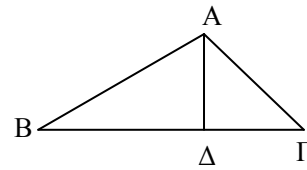
$$E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi r^2 \mu}{360} = \frac{3,14 \cdot 6^2 \cdot 60}{360} = 18,84 \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{ζητούμενο}} = 62,34 - 3 \cdot 18,84 = 62,34 - 56,52 = 5,82 \text{ cm}^2 .$$

37.

Στο διπλανό τρίγωνο είναι $AB = 6\text{cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$,
 $A\Delta$ ύψος και $\Delta\Gamma = 3\text{cm}$. Να υπολογίσετε

- α) Το ύψος $A\Delta$
 β) Την πλευρά $A\Gamma$
 γ) Το εμβαδόν του τριγώνου (δίνεται ότι $\sqrt{3} = 1,73$)

**Προτεινόμενη λύση**

α)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε ότι $\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Delta}{AB}$ άρα $\eta\mu 30^\circ = \frac{A\Delta}{6}$ άρα

$$\frac{1}{2} = \frac{A\Delta}{6}$$

$$A\Delta = 3\text{ cm}$$

β)

Πυθαγόρειο στο $A\Delta\Gamma$: $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 =$
 $= 3^2 + 3^2 =$
 $= 9 + 9 = 18$ άρα $A\Gamma = \sqrt{18}\text{ cm}$

γ)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{B\Delta}{AB}$ άρα

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{B\Delta}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{B\Delta}{6}$$

$$B\Delta = 3\sqrt{3} = 3 \cdot 1,73 = 5,19\text{ cm}$$

$$B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 5,19 + 3 = 8,19\text{ cm}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 8,19 \cdot 3 = 12,285\text{cm}^2$$

38.

Έστω η εξίσωση $3\lambda(x - 1) - 4 = (\lambda + 4)x + 8$

α) Αν $\lambda = 4$, να αποδείξετε ότι λύση της εξίσωσης είναι η $x = 6$

β) Αν η εξίσωση έχει λύση την $x = 2$, δείξτε ότι $\lambda = 20$

γ) Αν $\lambda = 2$ να λυθεί η εξίσωση.

Προτεινόμενη λύση

α)

Για $\lambda = 4$ η εξίσωση γίνεται $12(x - 1) - 4 = 8x + 8$ άρα $12x - 12 - 4 = 8x + 8$
 $4x = 24$
 $x = 24 : 4 = 6$

β)

Για $x = 2$ η εξίσωση γίνεται $3\lambda(2 - 1) - 4 = (\lambda + 4) \cdot 2 + 8$ άρα $3\lambda - 4 = 2\lambda + 8 + 8$
 $\lambda = 20$

γ)

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται $6(x - 1) - 4 = 6x + 8$ άρα $6x - 6 - 4 = 6x + 8$
 $0x = 18$ η οποία είναι αδύνατη

39.

Το μήκος της βάσης ενός κυλίνδρου είναι 62,8 cm και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι 1570 cm².

α) Δείξτε ότι η ακτίνα ρ της βάσης είναι ίση με 10 cm

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου

Προτεινόμενη λύση

α)

Από τον τύπο $L = 2\pi r$ έχουμε $62,8 = 2 \cdot 3,14r$

$$62,8 = 6,28r$$

$$r = 62,8 : 6,28 = 10 \text{ cm}$$

β)

Αν υ είναι το ύψος του κυλίνδρου τότε η ολική επιφάνεια αυτού δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} E_{\text{ολικό}} &= E_{\text{παραπλευρο}} + 2E_{\text{βάσης}} = 2\pi r u + 2\pi r^2 = \\ &= 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot u + 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 = \\ &= 62,8u + 628 \end{aligned}$$

και από υπόθεση $1570 = 62,8u + 628$

$$942 = 62,8u$$

$$u = 942 : 62,8 = 15 \text{ cm}$$

Τότε ο όγκος V του κυλίνδρου είναι $V = (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) =$
 $= \pi r^2 \cdot u = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 15 = 4710 \text{ cm}^3$

40.

Μία νοικοκυρά διαθέτει 65 €. Έχει αγοράσει 2 κιλά κρέας προς 12 € το κιλό και δύο κιλά τυρί προς 10 € το κιλό. Πόσα κιλά μήλα πρέπει να αγοράσει ώστε να τις περισσέψουν περισσότερα από 12 €, αν το κιλό τα μήλα κοστίζουν 1,50 € το κιλό.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι πρέπει να αγοράσει x κιλά μήλα.

Το κόστος των μήλων είναι $1,50 \cdot x$, του κρέατος $2 \cdot 12 = 24$ € και του τυριού $2 \cdot 10 = 20$ €.

Επομένως τα χρήματα που θα έχει ξοδέψει είναι $1,50x + 24 + 20 = 1,50x + 44$ €

Άρα θα της έχουν μείνει $65 - (1,50x + 44)$

Αυτό το ποσό πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τα 12 €. Επομένως πρέπει να ισχύει

$$65 - (1,50x + 44) > 12 \quad \text{άρα} \quad 65 - 1,50x - 44 > 12$$

$$- 1,50x > 12 + 44 - 65$$

$$- 1,50x > - 9$$

$$1,50x < 9 \quad \text{δηλαδή} \quad x < \frac{9}{1,50} = 6$$

Δηλαδή θα πρέπει να αγοράσει λιγότερα από 6 κιλά μήλα