3.5 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΩΝΙΚΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Σχετική θέση ευθείας και κωνικής τομής

Έστω η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ και μία κωνική τομή C με εξίσωση την $\varphi(x , y) = 0$.
Το πλήθος των κοινών σημείων της ε και της C καθορίζεται από το πλήθος λύσεων του συστήματος $\begin{cases} \varphi(x , y) = 0 \\ y = \lambda x + \beta \end{cases}$

Ποιο συγκεκριμένα :
Αν το σύστημα έχει δύο λύσεις , η ε και η C έχουν δύο κοινά σημεία.
Αν το σύστημα έχει μία διπλή λύση , η ε και η C έχουν ένα διπλό κοινό σημείο
Αν το σύστημα είναι αδύνατο , η ε και η C δεν έχουν κοινά σημεία

2.
Η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ εφαπτομένη στην κωνική C : $\varphi(x , y) = 0$

Όταν το σύστημα των εξισώσεων των ε και C έχει μία διπλή λύση , τότε αποδεικνύεται ότι η ε είναι εφαπτομένη στην C.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Σχετικά με το σύστημα των ε και C

Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} \varphi(x , y) = 0 & (1) \\ y = \lambda x + \beta & (2) \end{cases}$, αντικαθιστούμε το y στην (1) με το ίσο του από την (2).

Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} \varphi(x , \lambda x + \beta) = 0 & (3) \\ y = \lambda x + \beta & (4) \end{cases}$

Επειδή η (3) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού , έχει το πολύ δύο λύσεις .
Ποιο συγκεκριμένα :
Αν έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$, τότε η (3) έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως το σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις , άρα η ε και η C έχουν δύο διαφορετικά κοινά σημεία.
Αν έχει $\Delta = 0$, τότε η (3) έχει δύο ρίζες ίσες (μία διπλή) και επομένως το σύστημα έχει δύο λύσεις ίσες , άρα η ε και η C έχουν ένα διπλό κοινό σημείο , δηλαδή η ε είναι εφαπτομένη στην C.
Αν έχει $\Delta < 0$ τότε , η (3) δεν έχει πραγματικές ρίζες , επομένως το σύστημα είναι αδύνατο , οπότε η ε και η C δεν έχουν κοινά σημεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, εστία στον $x'x$, και εφάπτεται στην ευθεία $y = 2x + 1$.
Να βρείτε επίσης το σημείο επαφής.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $y^2 = 2px$, $p \neq 0$ η ζητούμενη παραβολή.

Θεωρώ το σύστημα $\Sigma : \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = 2px \\ y = 2x+1 \end{cases}$

Θεωρία 2

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 - 2px = 0 \\ y = 2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + (4-2p)x + 1 = 0 & \textbf{(1)} \\ y = 2x+1 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$
η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα
$\Delta = 0$
$(4 - 2p)^2 - 16 = 0$
$4p^2 - 16p = 0$
$4p(p - 4) = 0$
$p = 4$ ή $p = 0$ που απορρίπτεται

Σχόλιο (1)

Για $p = 4$ η ζητούμενη παραβολή γίνεται $y^2 = 8x$

Για $p = 4$ η (1) γίνεται $4x^2 - 4x + 1 = 0$ που έχει διπλή λύση την $x = \dfrac{1}{2}$.

Τότε η (2) δίνει $y = 2$, επομένως το σημείο επαφής είναι το $\left(\dfrac{1}{2} , 2\right)$

2.
Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = x + 3$.

Προτεινόμενη λύση

Επειδή η ζητούμενη εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία **ε** θα έχει εξίσωση της μορφής $y = x + \beta$

Θεωρώ το σύστημα $\Sigma: \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\beta)^2 = 4x \\ y = x + \beta \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 2\beta x + \beta^2 = 4x \\ y = x + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (2\beta - 4)x + \beta^2 = 0 & \textbf{(1)} \\ y = x + \beta \end{cases}$$

Η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$
η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα
$\Delta = 0$
$(2\beta - 4)^2 - 4\beta^2 = 0$
$4\beta^2 - 16\beta + 16 - 4\beta^2 = 0$
$\beta = 1$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y = x + 1$

3.
Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $y - 4 = 0$, να εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 6x + 2\lambda y - 15 = 0$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρώ το σύστημα $\Sigma: \begin{cases} y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2\lambda y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2\lambda y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x^2 + 4^2 - 6x + 2\lambda \cdot 4 - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x^2 + 16 - 6x + 8\lambda - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 & \textbf{(1)} \\ x^2 - 6x + 8\lambda + 1 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$
η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα
$\Delta = 0$
$36 - 4(8\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

4.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ αν και μόνο αν $\beta^2 = \rho^2(1 + \lambda^2)$

ii) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(15, -5)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρώ το σύστημα $\Sigma : \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ x^2 + (\lambda x + \beta)^2 = \rho^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ x^2 + \lambda^2 x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2 = \rho^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta & \textbf{(1)} \\ (\lambda^2 + 1)x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2 - \rho^2 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$
η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα
$4\lambda^2\beta^2 - 4(1 + \lambda^2)(\beta^2 - \rho^2) = 0$
$4\lambda^2\beta^2 - 4\beta^2 + 4\rho^2 - 4\lambda^2\beta^2 + 4\lambda^2\rho^2 = 0$
$\beta^2 = \rho^2 + \lambda^2\rho^2$
$\beta^2 = \rho^2(1 + \lambda^2)$

ii)

- Για κατακόρυφη εφαπτομένη του κύκλου από το σημείο $M(15, -5)$
  Αυτή θα έχει εξίσωση $x = 15$
  Αλλά οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου έχουν εξισώσεις $x = 5$ και $x = -5$.
  Άρα τέτοια εφαπτομένη δεν υπάρχει
- Για πλάγια – οριζόντια εφαπτομένη του κύκλου από το σημείο $M(15, -5)$
  Αυτή θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$
  Από το (i) θα ισχύει $\beta^2 = \rho^2(1 + \lambda^2) \Leftrightarrow \beta^2 = 5^2(1 + \lambda^2)$
  $\beta^2 = 25(1 + \lambda^2)$ **(3)**
  Επιπλέον , αφού η $y = \lambda x + \beta$ διέρχεται από το $M(15, -5)$ θα ισχύει
  $-5 = 15\lambda + \beta$ **(4)**
  Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε
  $(\lambda = 0$ και $\beta = -5)$ ή $\left(\lambda = -\frac{3}{4}\right.$ και $\left.\beta = \frac{25}{4}\right)$

  Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι $y = -5$, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

5.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2px$ αν και μόνο αν $p = 2\lambda\beta$

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \dfrac{15}{4\lambda}$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 15x$ για κάθε $\lambda \neq 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρώ το σύστημα $\Sigma : \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = 2\rho x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ (\lambda x+\beta)^2 = 2\rho x \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ \lambda^2 x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2 - 2\rho x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta & \textbf{(1)} \\ \lambda^2 x^2 + 2(\lambda\beta - \rho)x + \beta^2 - 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$

η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα

$\Delta = 0$

$(\lambda\beta - p)^2 - \lambda^2\beta^2 = 0$

$\lambda^2\beta^2 - 2\lambda\beta p + p^2 - \lambda^2\beta^2 = 0 \ = 0$

$p^2 - 2\lambda\beta p = 0 \ = 0$

$p(p - 2\lambda\beta) = 0$

$p = 0$ που απορρίπτεται ή $p = 2\lambda\beta$

ii)

Στην παραβολή $y^2 = 15\,x$ είναι $p = \dfrac{15}{2}$

Στην ευθεία $y = \lambda x + \dfrac{15}{4\lambda}$ είναι $\beta = \dfrac{15}{4\lambda}$

Επειδή ισχύει $\dfrac{15}{2} = 2\lambda\dfrac{15}{4\lambda}$ $(p = 2\,\lambda\beta)$, σύμφωνα με το (i), η ευθεία

$\varepsilon : y = \lambda x + \dfrac{15}{4\lambda}$ θα εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 15x$ για κάθε $\lambda \neq 0$

6.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : x - \lambda y + p\,\lambda^2 = 0$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4px$ για κάθε τιμή του λ.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής συναρτήσει των p , λ.

Προτεινόμενη λύση

i)

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x - \lambda y + p\lambda^2 = 0 & \textbf{(1)} \\ y^2 = 4px & \textbf{(2)} \end{cases}$

Η (1) $\Leftrightarrow$ $x = \lambda y - p\lambda^2$

Τότε η (2) γίνεται $y^2 = 4p(\lambda y - p\lambda^2)$ $\Leftrightarrow$ $y^2 - 4p\lambda y + 4\,p^2\,\lambda^2 = 0$ **(3)**

Η διακρίνουσα της (3) είναι $\Delta = 16\,p^2\,\lambda^2 - 16\,p^2\,\lambda^2 = 0$

Επομένως η (3) έχει διπλή λύση , συνεπώς το σύστημα έχει διπλή λύση , άρα η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη στην παραβολή.

ii)

Η διπλή λύση της (3) είναι η $y = 2p\lambda$, οπότε από την (1) έχουμε $x = p\lambda^2$

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $M(p\lambda^2 , 2p\lambda)$

7.

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 4$ η οποίες σχηματίζουν με τον άξονα των $x'x$ γωνία 45^o.

Προτεινόμενη λύση

Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της οποιασδήποτε ζητούμενης εφαπτομένης είναι $\lambda = \text{εφ}45^o = 1$. Επομένως έχει εξίσωση της μορφής $y = x + \beta$.

Θεωρώ το σύστημα $\Sigma : \begin{cases} y = x + \beta \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \beta \\ x^2 + 4(x+\beta)^2 = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x + \beta \\ x^2 + 4(x^2 + 2\beta x + \beta^2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + \beta \\ x^2 + 4x^2 + 8\beta x + 4\beta^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + \beta & \textbf{(1)} \\ 5x^2 + 8\beta x + 4\beta^2 - 4 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$

η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα

$\Delta = 0$

$64\beta^2 - 20(4\beta^2 - 4) = 0$

$80 - 16\beta^2 = 0$

$\beta = \pm\sqrt{5}$

Συνεπώς οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι $y = x \pm \sqrt{5}$

8.

Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κωνικών τομών

$C_1 : \ y^2 = \frac{1}{2}x$ και $C_2 : \ 5x^2 + 20y^2 = 4$

Προτεινόμενη λύση

- Η μοναδική κατακόρυφη εφαπτομένη της παραβολής C_1 είναι η $x = 0$

  Ενώ οι κατακόρυφες εφαπτομένες της έλλειψης C_2 είναι οι $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

  Επομένως οι κωνικές τομές δεν έχουν κοινή κατακόρυφη εφαπτομένη.
- Η παραβολή δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη , διότι αν κάποια οριζόντια ευθεία $y = \beta$ ήταν εφαπτομένη της παραβολής , το σύστημα $\begin{cases} y = \beta \\ y^2 = \frac{1}{2}x \end{cases}$ θα είχε διπλή λύση , που είναι άτοπο αφού είναι πρωτοβάθμιο.
- Έστω ότι $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda \neq 0$ είναι μία κοινή εφαπτομένη των δύο γραμμών. Τότε θα πρέπει κάθε ένα από τα συστήματα

  $\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = \frac{1}{2}x \end{cases}$ **(A)** , $\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ 5x^2 + 20y^2 = 4 \end{cases}$ **(B)** να έχει διπλή λύση

  Το σύστημα (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ 2y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ 2(\lambda x + \beta)^2 = x \end{cases}$

  $$\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ 2(\lambda^2 x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2) = x \end{cases}$$

  $$\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ 2\lambda^2 x^2 + 4\lambda\beta x + 2\beta^2 - x = 0 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ 2\lambda^2 x^2 + 4\lambda\beta x + 2\beta^2 - x = 0 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} y = \lambda x + \beta & \textbf{(1)} \\ 2\lambda^2 x^2 + (4\lambda\beta - 1)x + 2\beta^2 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

  Η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή $\Leftrightarrow$ το σύστημα έχει μία διπλή λύση $\Leftrightarrow$
  η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα
  $\Delta = 0$
  $(4\lambda\beta - 1)^2 - 4 \cdot 2\lambda^2 \cdot 2\beta^2 = 0$
  $16\lambda^2\beta^2 - 8\lambda\beta + 1 - 16\lambda^2\beta^2 = 0$
  $8\lambda\beta = 1$ **(3)**

  Ομοίως από το σύστημα (B) βρίσκουμε $4\lambda^2 - 5\beta^2 + 1 = 0$ **(4)**

  Λύνοντας το σύστημα των (3) , (4) βρίσκουμε $\lambda = \frac{1}{4}$ και $\beta = \frac{1}{2}$ ή

  $\lambda = -\frac{1}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$

  Επομένως οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ ή $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

9.

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ και ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε

i) Η ε να τέμνει τον C σε δύο σημεία

ii) Η ε να είναι εφαπτομένη του C

iii) Η ε να μην έχει κοινό σημείο με τον C

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα πρέπει το σύστημα $y = \lambda x$ **(1)** και $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ **(2)**

να έχει δύο ρίζες άνισες.

Η (2) λόγω της (1) γίνεται $(1 + \lambda^2)x^2 - 4x + 1 = 0$ **(3)**

Για να έχει το σύστημα δύο ρίζες άνισες , πρέπει και αρκεί η (3) να έχει δύο ρίζες άνισες , δηλαδή πρέπει και αρκεί $\Delta > 0 \Leftrightarrow$

$$16 - 4(\lambda^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 < 3 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$$

ii)

Θα πρέπει το σύστημα να έχει μία ρίζα διπλή $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow$ …… $\lambda = \pm\sqrt{3}$

iii)

Θα πρέπει το σύστημα να μην έχει ρίζες $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ ……… $\lambda < -\sqrt{3}$ ή $\lambda > \sqrt{3}$

10.

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x + \beta$ **(1)** και ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ **(2)**

Για τις διάφορες τιμές του β να βρείτε την σχετική θέση των δύο γραμμών.

Προτεινόμενη λύση

Η (2) λόγω της (1) γίνεται $2x^2 + 2\beta x + \beta^2 - 1 = 0$ **(3)** με $\Delta = 8 - 4\beta^2$

- Όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 - 4\beta^2 > 0 \Leftrightarrow$

  $$\beta^2 < 2 \Leftrightarrow$$

  $$|\beta| < \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

  $$-\sqrt{2} < \beta < \sqrt{2}$$

  Τότε η (3) έχει δύο ρίζες άνισες , επομένως το σύστημα των (1) και (2) έχει δύο λύσεις άνισες , άρα η ευθεία $y = x + \beta$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ έχουν δύο κοινά σημεία.

- Όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ …… $\beta = \pm\sqrt{2}$

  Τότε η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου

- Όταν $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ ….. $\beta < -\sqrt{2}$ ή $\beta > \sqrt{2}$

  Τότε η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία